Correction du baccalauréat général - Polynésie 13 mars 2023

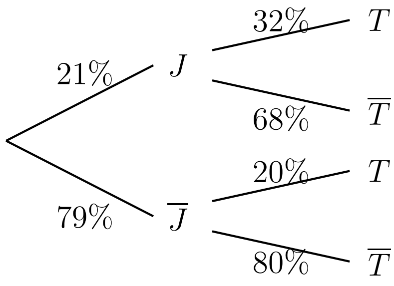
Épreuve d'enseignement de spécialité – Mathématiques –

13 mars 2023

Exercice 1 4 points **Thème : probabilités**

Partie A

1. On représente la situation par un arbre pondéré de probabilités :



La probabilité que la personne interrogée ait moins de 35 ans et utilise son vélo dans ses déplacements professionnels est la probabilité

$$P(J \cap T) = 21\% \times 32\% = 6,72\%$$

2. D'après l'arbre, ou la formule des probabilités totales,

$$P(T) = 21\% \times 32\% + 79\% \times 20\% = 22,52\%$$

3. La probabilité qu'il ait moins de 35 ans, sachant qu'il utilise son vélo dans ses déplacements professionnels, est

$$P_T(J) = \frac{P(J \cap T)}{P(T)} = \frac{6,72\%}{22,52\%} \simeq 0,2984$$

soit, à 10^{-2} près, une probabilité de 0,30.

Partie B

1. On répète $n = 120$ fois l'expérience aléatoire (épreuve de Bernoulli) : "sélectionner au hasard une personne" dont le succès est "la personne est utilisatrice de son vélo" de probabilité $p = 30\% = 0,30$. Ces répétitions sont identiques et indépendantes, car on assimile cette sélection comme un tirage avec remise.
Enfin, la variable aléatoire X est égale au nombre de succès, c'est-à-dire de d'utilisateurs de vélo.
On en déduit que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 120$ et $p = 0,3$.
2. La probabilité qu'au moins 50 utilisateurs de vélo parmi les 120 aient moins de 35 ans est alors, grâce à la calculatrice,
$$P(X \geqslant 50) = 1 - P(X \leqslant 49) \simeq 0,004$$

Exercice 2 5 points **Thème : géométrie dans l'espace**

1. a) D'après sa représentation paramétrique, on a directement que $\vec{v}(2;1;5)$ dirige la droite d_2.
   b) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ directeurs des droites d_1 et d_2 ne sont pas colinéaires : les droites ne sont donc pas parallèles.

c) On cherche un éventuel point d'intersection aux deux droites, soit $M(x;y;z)$.
Une représentation paramétrique de la droite d_1 est

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x &=& 2 &+& t \\ y &=& 3 &-& t \\ z &=& && t \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

Alors si ces droites sont sécantes, les coordonnées de $M \in d_1 \cap d_2$ vérifient les deux systèmes paramétriques, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que

$$\left\{\begin{array}{rclcrcl} x &=& 2k-3 &=& 2 &+& t \\ y &=& k &=& 3 &-& t \\ z &=& 5 &=& && t \end{array}\right.$$

La dernière équation donne directement que $t = 5$, puis la deuxième que $k = 3 - t = -2$.
Enfin, dans la première équation on a alors, $2k-3 = -7$ tandis que $2+t = 7$, ce qui est impossible.
On en déduit donc que ce point M n'existe pas, c'est-à-dire que ces deux droites d_1 et d_2 ne sont pas sécantes.

d) Ces deux droites ne sont ni parallèles ni sécantes : elles ne sont donc pas coplanaires.

2. a) On calcule les produit scalaires :

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = -1 \times 1 + 2 \times (-1) + 3 \times 1 = 0$$

et

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = -1 \times 2 + 2 \times 1 + 3 \times 0 = 0$$

qui montrent que $\vec{w}$ est bien orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

b) Soit $M(x;y;z)$ à l'intersection (éventuelle) du plan P et de la droite d_2. Alors, d'une part, d'après la représentation paramétrique de d_2, il existe un réel k tel que

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2k-3 \\ y &=& k \\ z &=& 5 \end{array}\right.$$

avec de plus, comme $M(x;y;z) \in P$,

$$5x + 4y - z - 22 = 0.$$

On en déduit que

$$5(2k-3) + 4k - 5 - 22 = 0 \iff k = \frac{42}{14} = 3$$

et donc qu'il y a un unique point d'intersection M , dont les coordonnées sont

$$\left\{\begin{array}{rclcl} x &=& 2k-3 &=& 3 \\ y &=& k &=& 3 \\ z &=& 5 \end{array}\right.$$

Remarque : on aurait aussi pu vérifier que $M \in P$ et $M \in d_2$ pour en déduire que M est ***un*** *point d'intersection.*
Il faut alors justifier qu'il n'y en a pas d'autre : P contient d_1, car P contient le point H et est dirigé par le vecteur $\vec{u}$ comme d_1, et d_1 et d_2 ne sont pas coplanaires, donc nécessairement, la droite d_2 n'estpas incluse dans le plan P.

3. a) Un vecteur directeur de Δ est le vecteur $\vec{w}$ déjà vu précédemment : $\vec{w}(-1;2;3)$ et on a

$$\vec{w}\cdot\vec{u} = -1\times 1 + 2\times(-1) + 1\times 3 = 0$$

ce qui montre que ces vecteurs directeurs, et donc aussi les droites, sont orthogonaux.
Pour que ces droites soient perpendiculaires, il faut encore qu'elles soient sécantes en un point. Soit $L(x;y;z)$ cet éventuel point, alors il existe des réels r et t tels que

$$\left\{\begin{array}{lllll} x &=& -r+3 &=& 2+t \\ y &=& 2r+3 &=& 3-t \\ z &=& 3r+5 &=& t \end{array}\right.$$

La dernière équation donne $r = 1-t$, puis la deuxième,

$$2r+3 = 2(1-t)+3 = 3-t \iff t = 2$$

et enfin la première et la troisième donnent alors $r=-1$. On trouve donc le point d'intersection, en lequel les droites sont perpendiculaiures,

$$\left\{\begin{array}{lllllll} x &=& -r+3 &=& 2+t &=& 4 \\ y &=& 2r+3 &=& 3-t &=& 1 \\ z &=& 3r+5 &=& t &=& 2 \end{array}\right.$$

soit $L(4;1;2)$.

b) La droite Δ est ainsi perpendiculaire à d_1 en L, d'après la question précédente.
De plus Δ est dirigée par $\vec{w}$ qui est orthogonal à $\vec{v}$ qui dirige lui d_2, donc Δ et d_2 sont orthogonales.
Il reste à voir que ces droites sont aussi sécantes, soit à trouver un point $M(x;y;z)$ et deux paramètres réels k et r tels que

$$\left\{\begin{array}{lllll} x &=& -r+3 &=& 2k-3 \\ y &=& 2r+3 &=& k \\ z &=& 3r+5 &=& 5 \end{array}\right.$$

soit donc $r=0$ grâce à la dernière équation, puis $k=3$ dans la deuxième, et la première est alors aussi vérifiée.
Δ et d_2 sont donc perpendiculaires en $M(3;3;5)$.
Finalement, la droite Δ répond bien à la question puisqu'elle est perpendiculaire aux droites d_1 et d_2.

Exercice 3 4 points **Thème : fonction exponentielle, algorithmique**

1. **Vrai.** f est deux fois dérivable avec $f'(x) = e^x - 1$ puis $f''(x) = e^X > 0$ pour tour réel x, ce qui montre que f est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. **Vrai.** C'est une équation produit nul : $(2e^x - 6)(e^x+2) = 0$ si et seulement si $2e^x - 6 = 0$ ou $e^x + 2 = 0$.
   La première équation donne $e^x = 3 \iff x = \ln(3)$, tandis que la deuxième $e^x = -2$ n'a pas de solution car $e^x > 0$ pour tour réel x.
   Finalement, l'équation a bien comme unique solution $\ln(3)$.
3. **Faux.** On a

$$\frac{e^{2x}-1}{e^x - x} = \frac{e^{2x}\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\dfrac{x}{e^x}\right)} = e^x\frac{1-\dfrac{1}{e^x}}{1-\dfrac{x}{e^x}}$$

avec $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = 0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x} = 0$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$.
On obtient donc, par produit et quotient de limites, que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^x-x} = +\infty$$

4. **Vrai.** On a un produit $F = uv + 4$, donc $F' = u'v + uv' + 0$ soit

$$F'(x) = 2e^{3x} + (2x+1)3e^{3x} = (6x+5)e^{3x}$$

On a donc $F' = f$, c'est-à-dire que F est une primitive de f.
On a enfin $F(0) = (2\times 0+1)e^{3\times 0} + 4 = 5$, et donc F prend bien aussi la valeur 5 en $x = 0$.

5. **Faux.** La boucle dans la fonction `mystère` calcule la somme des valeurs de la liste L. Finalement la fonction `mystere` retourne cette somme divisée par le nombre de valeurs (`len(L)`, pour "length(L)" est la longueur de L, c'est-à-dire le nombre de valeurs dans L).
Ainsi, la fonction `mystère` renvoie la moyenne des valeurs de la liste L, ici

$$\frac{1+9+9+5+0+3+6+12+0+5}{10} = 5$$

Exercice 4 4 points **Thème : suites, fonctions**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3.$$

1. a) Soit, pour tout entier n, les propositions $P(n) : u_n = 2\times 0,9^n - 3$.
Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = -1$ et $2\times 0,9^0 - 3 = 2\times 1 - 3 = -1$, ce qui montre que la proposition $P(0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons que la propriété $P(n)$ soit vraie pour un entier n,
c'est-à-dire que $u_n = 2\times 0,9^n - 3$.
En multipliant par $0,9 > 0$ on obtient alors $0,9u_n = 0,9\,(2\times 0,9^n - 3) = 2\times 0,9^{n+1} - 2,7$
puis, en soustrayant $0,3$, on obtient $0,9u_n - 0,3 = 2\times 0,9^{n+1} - 3$,
c'est-à-dire $u_{n+1} = 2\times 0,9^{n+1} - 3$, et la propriété $P(n+1)$ est encore vraie.
Conclusion : On vient donc de démontrer, d'après le principe de récurrence, que $P(n) : u_n = 2\times 0,9^n - 3$ est vraie pour tout entier n.

b) Pour tout entier n, on a n, $2\times 0,9^n > 0$, et donc $u_n = 2\times 0,9^n - 3 > -3$.
D'autre part, pour tout entier n, on aussi $0,9^n \leqslant 1^n = 1$ et donc $u_n = 2\times 0,9^n - 3 \leqslant 2\times 1 - 3 = -1$.
Finalement, on a bien démontré l'encadrement $-3 < u_n \leqslant -1$, pour tout entier n.

c) On a pour tout entier n,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (2\times 0,9^{n+1} - 3) - (2\times 0,9^n - 3) \\ &= 2\times 0,9^{n+1} - 2\times 0,9^n - 3 \\ &= 2\times 0,9^n\,(0,9 - 1) \\ &= -2\times 0,9^n \times 0,1 < 0 \end{aligned}$$

et donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

d) La suite (u_n) est donc strictement décroissante d'après la question précédente, et d'après la question 1.b) elle est minorée par -3.
On en déduit, grâce au théorème de convergence monotone, que la suite (u_n) converge vers une limite l.
Par ailleurs, d'après l'expression $u_n = 2\times 0,9^n - 3$, et comme $-1 < 0,9 < 1$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,9^n = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -0,3$.

Remarque : ce dernier calcul montre directement que la suite converge, et on n'a pas besoin en fait d'utiliser ici le théorème de convergence monotone.
Si on l'utilise, on alors aussi utiliser le théorème du point fixe une fois qu'on a montré que la suite est convergente, car comme la suite converge vers un réel l, on a alors, d'après $u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3$, nécessairement $l = 0,9l - 0,3 \iff 0,1l = 0,3 \iff l = 3$.

2. On se propose d'étudier la fonction g définie sur $]-3\ ;\ -1]$ par : $g(x) = \ln(0,5x+1,5) - x$

a) On a $g = \ln(u) - v$ avec $u(x) = 0,5x + 1,5$ donc $u'(x) = 0,5$ et $v(x) = x$ donc $v'(x) = 1$, d'où $g' = \dfrac{u'}{u} - v'$, soit

$$g'(x) = \frac{0,5}{0,5x+1,5} - 1 = \frac{-0,5x-1}{0,5x+1,5}$$

On dresse alors le tableau de variation de f :

x	-3		-2		-1
$-0,5x-1$		$+$	0	$-$	
$0,5x+1,5$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
g	$\Vert$	$\nearrow$		$\searrow$	

avec $g(1) = \ln(-0,5+1,5) - (-1) = 1$ car $\ln(1) = 0$.

De plus, $\lim\limits_{x\to-3} 0,5x + 1,5 = 0$ d'où, par composition, $\lim\limits_{x\to-3} \ln(0,5x+1,5) = \lim\limits_{x\to-3} g(x) = -\infty$

b) On a $g(-2) = \ln(0,5) - (-2) \simeq 1,3$. Comme g est continue, strictement décroissante sur $[-2; -1]$, avec $g(1) = 1 > 0$, on en déduit que $g(x) = 0$ n'admet aucune solution sur cet intervalle.

Par contre, sur $]-3; -1]$, g est continue, strictement croissante, avec $\lim\limits_{x\to-3} g(x) = -\infty$ et $g(1) > 0$, et donc, d'après le théorème de la bijection (ou corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, ou théorème des valeurs intermédiaires version forte), il existe un unique $\alpha \in]-3; -1]$ tel que $g(\alpha) = 0$.

Avec la calculatrice, par balayage par exemple, on trouve l'encadrement $-2,889 < \alpha < -2,888$.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout $\in \mathbb{N}$, par : $v_n = \ln(0,5u_n + 1,5)$

a) D'après la question 1.a., on a que $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$ et donc

$$\begin{aligned} v_n &= \ln(0,5u_n + 1,5) \\ &= \ln\Big(0,5(2\times 0,9^n - 3) + 1,5\Big) \\ &= \ln(0,9^n) \\ &= n\ln(0,9) \end{aligned}$$

et donc que $v_{n+1} - v_n = (n+1)\ln(0,9) - n\ln(0,9) = \ln(0,9)$.

On en déduit que (v_n) est bien arithmétique de raison $\ln(0,9)$.

b) On a

$$\begin{aligned} v_n = u_n &\iff \ln(0,5u_n + 1,5) = u_n \\ &\iff \ln(0,5u_n + 1,5) - u_n = 0 \\ &\iff g(u_n) = 0 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} u_k = \alpha &\iff 2\times 0,9^k - 3 = \alpha \\ &\iff 0,9^k = \frac{\alpha+3}{2} \\ &\iff k\ln(0,9) = \ln\left(\frac{\alpha+3}{2}\right) \\ &\iff k = \frac{1}{\ln(0,9)}\ln\left(\frac{\alpha+3}{2}\right) \end{aligned}$$

Or on a vu l'encadrement $-2,889 < \alpha < -2,888$, d'où

$$27,41 \leqslant k = \frac{1}{\ln(0,9)}\ln\left(\frac{\alpha+3}{2}\right) \leqslant 27,42$$

ce qui montre qu'un tel nombre k ne peut pas être entier.

d) D'après ce qui précède $v_k = u_k \iff g(u_k) = 0 \iff u_k = \alpha$ qui est impossible pour un entier k. Ainsi, $u_k = v_k$ est aussi impossible pour un entier k.