Corrigé du baccalauréat général - Métropole
Épreuve d'enseignement de spécialité
– Mathématiques –

20 mars 2023

Exercice 1 **5 points**

1. **b.** $p_G(D) = \dfrac{P(G\cap D)}{P(G)} = \dfrac{0,2\%}{20\%} = 0,01$

2. **b.** D'après l'arbre, ou la formule des probabilités totales, on a
$$P(D) = P(G\cap D) + P(\overline{G}\cap D)$$
soit donc, avec les données de l'énoncé,
$$8,2\% = 0,2\% + P(\overline{G}\cap D) \iff P(\overline{G}\cap D) = 8\% = 0,08$$

3. **b.** Il s'agit de la probabilité conditionnelle
$$P_D(G) = \frac{P(G\cap D)}{P(D)}\frac{0,2\%}{8,2\%} \simeq 0,024$$

4. **b.** Avec une calculatrice on trouve $p(X>2) \simeq 0,789$

5. **c.** En tâtonnant avec la calculatrice, on trouve la plus grande valeur de $n = 10$.

   On peut aussi résoudre exactement le problème : pour X qui suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$, on a $P(X=0) = (1-p)^n = 0,918^n$, et donc
$$\begin{aligned} P(X=0) \geqslant 0,4 \quad &\iff 0,918^n \geqslant 0,4 \\ &\quad n\ln(0,918) \geqslant \ln(0,4) \end{aligned}$$
   puis, en divisant par $\ln(0,918) < 0$, donc en changeant l'ordre, on trouve
$$n \leqslant \frac{\ln(0,4)}{\ln(0,918)} \simeq 10,71$$
   et donc le plus grand entier est $n = 10$.

Exercice 2 $f(x) = x^2 - 8\ln(x)$ pour $x \in]0\,;\,+\infty[$ **5 points**

1. $\lim\limits_{x\to0} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to0}\ln(x) = -\infty$ d'où, par soustraction des limites, $\lim\limits_{x\to0} f(x) = +\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$, d'où par produit des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. On a, pour tout réel $x > 0$,
$$f'(x) = 2x - 8\times\frac{1}{x} = \frac{2x^2-8}{x} = \frac{2\left(x^2-4\right)}{x}$$

4. Le numérateur de $f'(x)$ est un trinôme du second degré de racines évidentes -2 et 2, et on a donc

x	0		2		$+\infty$
x^2-4		$-$	0	$+$	
x	0	$+$	|	$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	$4-8\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

   Le minimum de f sur $]0\,;\,+\infty[$ est $f(2) = 8-4\ln(2)$ atteint en $x = 2$.

5. Sur l'intervalle $]0\,;\,2]$, f est continue et strictement décroissante, avec $\lim\limits_{x\to+} f(x)=+\infty$ et $f(2)\simeq -1,5<0$.
On en déduit, d'après le théorème de la bijection (ou théorème des valeurs intermédaires version forte) que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur cet intervalle.
6. On complète le tableau de variation précédent en y ajoutant $f(\alpha)=f(\beta)=0$, et on en déduit le signe de f :

x	0	α	2	β	$+\infty$
f	$+\infty$	0	$4-8\ln(2)$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

7. Pour tout nombre réel k, on a
$$g_k(x)=x^2-8\ln(x)+k=f(x)+k$$
On a vu précédemment que, pour tout $x>0$, on a $f(x)\geqslant 4-8ln(2)$ et ainsi,
$$g_k(x)=f(x)+k\geqslant 4-8ln(2)+k$$
Pour $g_k(x)$ soit positive pour tout $x>0$, il faut et suffit donc de choisir $k=-4+8ln(2)$

Exercice 3 **5 points**

Partie A : Première modélisation

$u_1=3$ et, pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $u_{n+1}=0,9u_n+1,3$

1. $u_2=0,9u_1+1,3=0,9\times 3+1,3=4$, soit 400 questions au bout de 1 mois et $u_3=0,9u_2+1,3=0,9\times 4+1,3=4,9$, soit 490 questions au bout du 2ème mois.
2. Soit $P(n)$: $u_n=13-\dfrac{100}{9}\times 0,9^n$, pour $n\geqslant 1$.

   Initialisation : Pour $n=1$ on a $13-\dfrac{100}{9}\times 0,9^1=13-10=3$, et comme $u_1=3$, on en déduit que la propriété $P(1)$ est donc vraie.

   Hérédité : Supposonss que, pour un certain entier n, la propriété $P(n)$ soit vraie, c'est-à-dire : $u_n=13-\dfrac{100}{9}\times 0,9^n$.
   On a, par définition de la suite, $u_{n+1}=0,9u_n+1,3$, et donc, en utilisant l'hypothèse de récurrence,
$$\begin{aligned}u_{n+1}&=0,9\times\left(13-\frac{100}{9}\times 0,9^n\right)+1,3\\&=0,9\times 13-\frac{100}{9}\times 0,9^{n+1}+1,3\\&=13-\frac{100}{9}\times 0,9^{n+1}\end{aligned}$$
   ce qui montre que la propriété $P(n+1)$ est donc aussi vraie.

   Conclusion : On vient donc de démontrer, d'après le principe de récurrence, que $P(n)$: $u_n=13-\dfrac{100}{9}\times 0,9^n$ est vraie pour tout entier $n\geqslant 1$.
3. En utilisant l'expression précédente, on a
$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n&=\left(13-\frac{100}{9}\times 0,9^{n+1}\right)-\left(13-\frac{100}{9}\times 0,9^n\right)\\&=13-\frac{100}{9}\times 0,9^{n+1}-13+\frac{100}{9}\times 0,9^n\\&=\frac{100}{9}\times 0,9^n\,(0,9-1)\\&=\frac{100}{9}\times 0,9^n\times 0,1>0\end{aligned}$$
   On en déduit que la suite (u_n) est croissante.

4. Ce programme retourne le premier rang n tel que $u_n > 8,5$.
   On trouve, soit en effectuant ce programme sur la calculatrice, soit par le calcul exact :

$$\begin{aligned}
u_n > 8,5 &\iff 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n > 8,5 \\
&\iff -\frac{100}{9} \times 0,9^n > -4,5 \\
&\iff 0,9^n < \frac{4,5 \times 9}{100} \\
&\iff \ln(0,9^n) = n\ln(0,9) < \ln\left(\frac{4,5 \times 9}{100}\right) \\
&\iff n > \frac{1}{ln(0,9)} \times \frac{4,5 \times 9}{100} \simeq 8,58
\end{aligned}$$

   Ainsi, le premier entier, renvoyé par le programme Python lors de l'exécution de seuil(8.5) est 10.

Partie B : Une autre modélisation $v_n = 9 - 6 \times e^{-0,19\times(n-1)}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

1. $v_1 = 9 - 6e^0 = 9 - 6 = 3$ et $v_2 = 9 - 6e^{-0,19} \simeq 4,04$.
2.

$$\begin{aligned}
v_n > 8,5 &\iff 9 - 6 \times e^{-0,19\times(n-1)} > 8,5 \\
&\iff -6 \times e^{-0,19\times(n-1)} > -0,5 \\
&\iff e^{-0,19(n-1)} < \frac{0,5}{6} \\
&\iff -0,19(n-1) < \ln\left(\frac{0,5}{6}\right) \\
&\iff n - 1 > \frac{1}{-0,19} \times \ln\left(\frac{0,5}{6}\right) \\
&\iff n > \frac{1}{-0,19} \times \ln\left(\frac{0,5}{6}\right) + 1 \simeq 14,08
\end{aligned}$$

   La plus petite valeur entière recherchée est donc $n = 15$.

Partie C : Comparaison des deux modèles

1. Avec le premier modèle, les 850 questions sont dépassées pour $n = 10$ semaines, tandis qu'avec le deuxième modèle, elles sont dépassées pour $n = 15$ semaines.
   Le premier modèle conduit donc à procéder le plus tôt à la modification.
2. A long terme, c'est-à-dire pour n grand, ou encore pour $n \to +\infty$, on a :
   — Pour le 1er modèle : comme $-1 < 0,9 < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,9^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 13$
   — Pour le 2ème modèle : on a $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-0,19(n-1)} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 9$
   À long terme, pour la première modélisation il y a le plus grand nombre de questions sur la FAQ à long terme.

Exercice 4 **5 points**

1. $E(0;0;1)$, $C(1;1;0)$ et $G(1;1;1)$.
2. On a $\overrightarrow{EC}(1;1;-1)$ qui dirige (EC) et qui passe par $E(0;0;1)$ d'où une représentation paramétrique

$$(EC) : \left\{\begin{array}{ccccc} x &=& 0 &+& t \\ y &=& 0 &+& t \\ z &=& 1 &-& t \end{array}\right. , \ pour t \in \mathbb{R}$$

   soit

$$(EC) : \left\{\begin{array}{ccl} x &=& t \\ y &=& t \\ z &=& 1 - t \end{array}\right. , \ pour t \in \mathbb{R}$$

3. On a $B(1;0;0)$ donc $\overrightarrow{BG}(0;1;1)$ et alors $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{EC} = 0\times 1+1\times 1+1\times(-1) = 0$
et $D(0;1;0)$ donc $\overrightarrow{BD}(-1;1;0)$ et alors $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{EC} = -1\times 1+1\times 1+0\times(-1) = 0$
Ainsi, (EC) est orthogonale à deux vecteurs non colinéaires du plan (GBD), et donc (EC) est orthogonale au plan (GBD).

4. a) $\overrightarrow{EC}(1;1;-1)$ est donc un vecteur normal au plan (GBD) qui a donc une équation cartésienne de la forme
$$x+y-z+d=0$$
Comme $G(1;1;1)\in(GBD)$, on a aussi
$$1+1-1+d=0 \iff d=-1$$
d'où l'équation cartésienne
$$x+y-z-1=0$$
b) Soit $I(x;y;z)\in(GBD)\cap(EC)$, alors en utilisant les équations de la représentation paramétrique ainsi que l'équation cartésienne précédente, on obtient
$$t+t-(1-t)-1=0 \iff t=\frac{2}{3}$$
Finalement, avec la représentation paramétrique de (EC) on obtient les coordonnées
$$I\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t=\frac{2}{3}\\ y &=& t=\frac{2}{3}\\ z &=& 1-t=\frac{1}{3}\end{array}\right.$$
c'est-à-dire $I\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$.

c) La distance du point E au plan (GBD) est égale à EI car $(EC)\perp(GBD)$ et donc I est le projeté orthogonal de E sur (GBD).
Cette distance est alors
$$\begin{aligned} EI &= \sqrt{\left(\frac{2}{3}-0\right)^2+\left(\frac{2}{3}-0\right)^2+\left(\frac{1}{3}-1\right)^2}\\ &= \sqrt{3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\end{aligned}$$

5. a) On a pour les trois côtés $BD=BG=DG=\sqrt{2}$ car ce sont les diagonales des faces du cube, donc des diagonales de carrés de côté 1.
Ce triangle BDG est donc bien équilatéral.

b) On a $J(1/2;1/2;0)$ qui est le pied de la médiane issue de G dans le triangle BDG. Mais comme ce triangle est équilatéral, cette médiane est aussi la médiatrice et la hauteur, et en particulier le triangle BJG est rectangle en J et
$$\mathcal{A}_{BDG} = 2\times\mathcal{A}_{BGJ}$$
avec
$$\mathcal{A}_{BGJ} = \frac{BJ\times JG}{2}$$
et $BJ=\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$ et
$$JG=\sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+(1-0)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}$$
Ainsi, finalement,
$$\mathcal{A}_{BDG}=\frac{1}{2}\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

6. En utilisant comme base BDG et comme hauteur EI (qui sont bien orthogonaux d'après les questions précédentes), on trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{EGBD} &= \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{BDG} \times EI \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3}\sqrt{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$