Baccalauréat général
Épreuve d'enseignement de spécialité
– Mathématiques –

Corrigé du Sujet 0 – Session 2021

Exercice 1

1. **Réponse b.**
Comme $-1 < \dfrac{1}{4} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$, et alors, d'après le théorème des gendarmes, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

2. **Réponse c.**
En dérivant le produit $f = uv$ avc $u(x) = x$ et $v(x) = e^{x^2} = e^{w(x)}$ donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = w'(x)e^{w(x)} = 2xe^{x^2}$, on obtient alors
$$f'(x) = 1 \times e^{x^2} + x \times 2xe^{x^2} = \left(1 + 2x^2\right) e^{x^2}$$

3. **Réponse c.**
En factorisant par les termes de plus haut degré,
$$\frac{x^2-1}{2x^2-2x+1} = \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}$$
d'où la limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-2x+1} = \frac{1}{2}$$

4. **Réponse c.**
C'est une application du théorème des valeurs intermédiaires, sur l'intervalle $[0;1]$ sur lequel la fonction est continue et telle que $h(0) > h(a) = 1 > h(1)$.

5. **Réponse c.**
La fonction g' est croissante sur l'intervalle $[1\ ;\ 2]$, donc la fonction g est convexe sur cet intervalle.

Exercice 2

1. a) On a $I\left(\frac{1}{2};0;1\right)$ et $J\,(2;0;1)$.

   b) On en déduit les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

   c) $\overrightarrow{\mathrm{DJ}}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$, qui ne sont pas colinéaires, car $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BI} = -1+0+1 = 0$ et $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BG} = 0-1+1 = 0$.
   On en déduit que $\overrightarrow{\mathrm{DJ}}$ est bien orthogonal à tous les vecteurs du plan (BGI), et donc qu'il est normal à ce plan.

   d) D'après la question précédente, le plan (BGI) a une équation de la forme $2x - y + z + d = 0$.
   De plus le point B appartient au plan (BGI), et donc les coordonnées de B vérifient l'équation du plan, c'est-à-dire $2 - 0 + 0 + d = 0 \iff d = -2$.
   Une équation cartésienne du plan (BGI) est donc $2x - y + z - 2 = 0$.

2. On note d la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).

   a) La droite d est orthogonale au plan (BGI) qui admet $\overrightarrow{DJ}$ comme vecteur normal, donc $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur directeur de la droite d.
   Une représentation paramétrique de la droite d, passant par $f(1;0;1)$ est donc
$$d : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+2t \\ y &=& \quad -t \\ z &=& 1+\ \ t \end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}$$

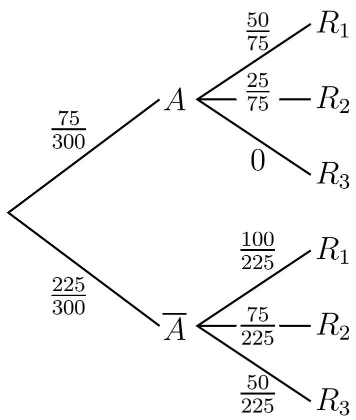
b) La droite d et le plan (BGI) sont orthogonaux et sont donc, en particulier, sécants en un unique point.
On peut alors simplement vérifier que le point L donné appartient à la fois au plan et à la droite.
D'une part, $2x_L - y_L + z_L - 2 = \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{5}{6} - 2 = 0$, donc L $\in$ (BGI).
D'autre part, en ce qui concerne la droite d, on cherche t tel que $\left\{\begin{array}{rcl} \frac{2}{3} & = & 1+2t \\ \frac{1}{6} & = & -t \\ \frac{5}{6} & = & 1+t \end{array}\right.$.
On trouve $t = -\dfrac{1}{6}$ donc L $\in d$.
Le point L est donc bien le point d'intersection de la droite d et du plan (BGI).

3. a) La pyramide $FBGI$ a pour base le triangle rectangle FBG, d'aire $\dfrac{FG \times FB}{2} = \dfrac{1}{2}$, et pour hauteur $IF = \dfrac{1}{2}$.
Le volume de la pyramide $FBGI$ est donc
$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

b) La droite d est orthogonale au plan (BGI) et coupe ce plan en L, donc FL est une hauteur de la pyramide $FBGI$ dont le triangle BGI est la base.
On a
$$FL = \sqrt{\left(\frac{2}{3}-1\right)^2 + \left(\frac{1}{6}-0\right)^2 + \left(\frac{5}{6}-1\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$
et alors le volume de la pyramide $FBGI$ est
$$\begin{aligned} & \mathcal{V} = \frac{1}{3} \times FL \times \mathcal{A}_{BGI} \\ \iff \quad & \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\sqrt{6}} \times \mathcal{A}_{BGI} \\ \iff \quad & \mathcal{A}_{BGI} = \frac{3\sqrt{6}}{12} = \frac{\sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$
L'aire du triangle BGI est donc égale à $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

Exercice 3

1. On modélise la situation par un arbre pondéré.



2. a) La probabilité que la personne interrogée ait suivi une formation avec conduite accompagnée et réussi l'examen à sa deuxième présentation est :
$$\begin{aligned} P(A \cap R_2) &= P(A) \times P_A(R_2) \\ &= \frac{75}{300} \times \frac{25}{75} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

b) La probabilité que la personne interrogée ait réussi l'examen à sa deuxième présentation est $P(R_2)$ soit, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(R_2) &= P_A(R_2) \times P(A) + P_{\overline{A}}(R_2) \times P\left(\overline{A}\right) \\ &= \frac{75}{300} \times \frac{25}{75} + \frac{225}{300} \times \frac{75}{225} \\ &= \frac{25}{300} + \frac{75}{300} = \frac{100}{300} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

c) La personne interrogée a réussi l'examen à sa deuxième présentation. La probabilité qu'elle ait suivi une formation avec *conduite accompagnée* est alors la probabilité conditionnelle :

$$P_{R_2}(A) = \frac{P(A \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

3. On note X la variable aléatoire qui, à toute personne choisie au hasard dans le groupe, associe le nombre de fois où elle s'est présentée à l'examen jusqu'à sa réussite.

a) La loi de probabilité de la variable aléatoire X est :

x_i	1	2	3
$p_i = P(X = x_i)$	$P(R_1)$	$P(R_2)$	$P(R_3)$

soit, en calculant les différentes probabilités :

— $P(R_1) == \frac{75}{300} \times \frac{50}{75} + \frac{225}{300} \times \frac{100}{225} = \frac{50}{300} + \frac{100}{300} = \frac{1}{2}$

— $P(R_2) = \frac{1}{3}$

— $P(R_3) = 0 + \frac{225}{300} \times \frac{50}{225} = \frac{50}{300} = \frac{1}{6}$

Donc la loi de probabilité de la variable aléatoire X est :

x_i	1	2	3
$p_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

b) L'espérance de cette variable aléatoire est :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{3} x_i \times p_i \\ &= 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{5}{3} \approx 1,67 \end{aligned}$$

Cela signifie que le nombre de passages pour réussir l'examen est en moyenne de $1,67$.

4. On choisit, successivement et de façon indépendante, n personnes parmi les 300 du groupe étudié, où n est un entier naturel non nul. On assimile ce choix à un tirage avec remise de n personnes parmi les 300 personnes du groupe.

On admet que la probabilité de l'évènement R_3 est égale à $\frac{1}{6}$.

a) On cherche un évènement dont la probabilité est égale à $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

$P(R_3) = \frac{1}{6}$ donc $P\left(\overline{R_3}\right) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Le nombre $\frac{5}{6}$ est donc la probabilité de l'événement "R_1 ou R_2", c'est-à-dire la probabilité qu'une personne prise au hasard réussisse l'examen à la première tentative ou à la deuxième.

La probabilité que n personnes réussissent l'examen à la première ou à la deuxième tentative est de $\left(\frac{5}{6}\right)^n$.

L'événement de probabilité $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$ est l'événement contraire du précédent, donc correspond à l'événement "au moins une personne n'a pas réussi l'examen à la première ou à la deuxième tentative", c'est-à-dire "au moins une personne a réussi l'examen à la troisième tentative".

b) La valeur renvoyée par **seuil**(0.9) est la première valeur de n pour laquelle $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n > 0,9$.
On résout cette inéquation :

$$\begin{aligned} 1-\left(\frac{5}{6}\right)^n > 0,9 &\iff \left(\frac{5}{6}\right)^n < 0,1 \\ &\iff \ln\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n\right) < \ln(0,1) \\ &\iff n\ln\left(\frac{5}{6}\right) < \ln(0,1) \\ &\iff n < \frac{\ln(0,1)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \sim 12,6 \end{aligned}$$

La commande **seuil**(0.9) renvoie donc la valeur 13.
Il faut donc prendre $n = 13$ personnes sur les 300 pour que la probabilité d'en avoir une qui a réussi l'examen à sa troisième tentative soit supérieure à $0,9$.

Exercice A

Partie I

1. $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$ car c'est le coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}_A$, qui est horizontale.

   De même, $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}_B$, qui passe par le point $B(1;2)$ et le point de l'axe des abscisses de coordonnées $(0;3)$.
   Ce coefficient directeur est donc $f'(1) = \frac{3-0}{0-3} = -1$.
2. La droite $\mathcal{T}_B$ a pour coefficient directeur -1 et 3 pour ordonnée à l'origine, donc elle a pour équation : $y = -x+3$.

Partie II $f(x) = \frac{2+\ln(x)}{x}$, pour $x > 0$

1. —
   $$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2+\ln\left(\frac{1}{e}\right)}{\frac{1}{e}} = e\left(2-\ln(e)\right) = e(2-1) = e$$
   donc $A \in \mathcal{C}_f$.

   — $f(1) = \frac{2+\ln(1)}{1} = 2$ donc $B \in \mathcal{C}_f$.

   — La courbe $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en un point dont l'abscisse est solution de l'équation $f(x) = 0$, soit,
   $$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff \frac{2+\ln(x)}{x} = 0 \\ &\iff 2+\ln(x) = 0 \\ &\iff \ln(x) = -2 \\ &\iff x = e^{-2} \end{aligned}$$
   Donc la courbe $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en un point unique de coordonnées $(e^{-2}\ ;\ 0)$.
2. On a $\lim\limits_{x\to 0}(2+\ln(x)) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, avec $x > 0$, d'où, par quotient des limites, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

   On a $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$, avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ d'où, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3. Pour $x > 0$, en dérivant le quotient $f = \dfrac{u}{v}$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \times x - (2 + \ln(x)) \times 1}{x^2} \\ &= \frac{1 - 2 - \ln(x)}{x^2} = \frac{-1 - \ln(x)}{x^2} \end{aligned}$$

4. On a $-1 - \ln(x) > 0 \iff -1 > \ln(x) \iff x < e^{-1}$
On dresse le tableau de variations de f sur $]0 \ ; \ +\infty[$:

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$-1-\ln(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
x^2	0		$+$		
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

5. La fonction f est convexe lorsque f'' est positive, soit

$$\begin{aligned} f''(x) \geqslant 0 &\iff \frac{1 + 2\ln(x)}{x^3} \geqslant 0 \\ &\iff 1 + 2\ln(x) \geqslant 0 \\ &\iff \ln(x) \geqslant -\frac{1}{2} \\ &\iff x \geqslant e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Donc le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe est $\left[e^{-\frac{1}{2}} \ ; \ +\infty\right[$.

Exercice B

1. a) $f(0)$ représente la température d'une baguette lors de sa sortie du four, c'est-à-dire 225°C.
   b) Toutes les solutions de cette équation s'écrivent sous la forme :

$$f(t) = \frac{150}{6} + Ce^{-6t} = 25 + Ce^{-6t}$$

   c) On sait de plus que

$$f(0) = 225 \iff Ce^0 + 25 = 225 \iff C = 200$$

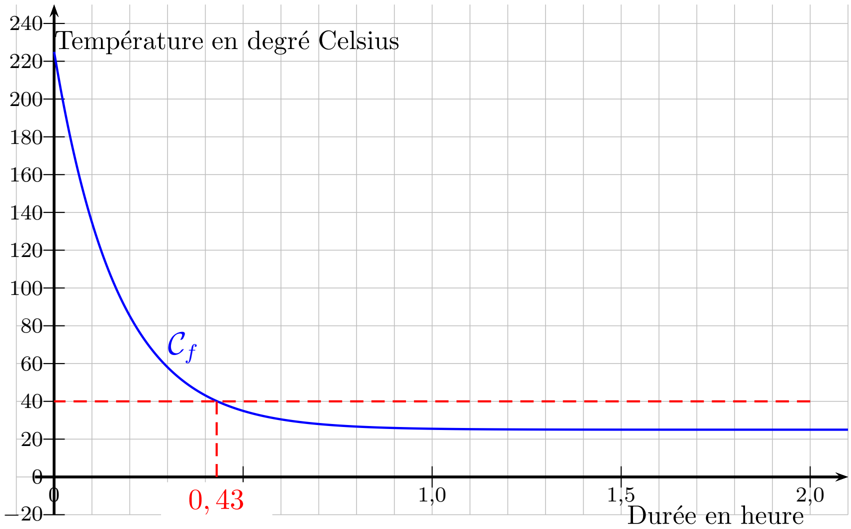
   et on a donc bien, pour tout réel $t \geqslant 0$:

$$f(t) = 200e^{-6t} + 25$$

2. — On a, pour tout réel $t \geqslant 0$, $f'(t) = -1200e^{-6t}$ et donc, comme $e^{-6t} > 0$, on en déduit que $f'(t) < 0$ et donc que f est bien strictement décroissante.
   — On a $\lim\limits_{t \to +\infty} -6t = -\infty$, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-6t} = 0$ et donc $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 25$.
   La fonction f est donc en accord aussi avec l'observation selon laquelle la température tend à se stabiliser à la température ambiante de 25°C

3. La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[0 : +\infty[$. Par ailleurs, $f(0) = 225 > 40$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 25 < 40$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (ou théorème de la bijection), il existe un unique élément $\alpha \in [0; +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 40$.

4.



La courbe $\mathcal{C}_f$ semble atteindre 40 vers $0,43$ heure soit $0,43 \times 60 = 25,8$ minutes. On trouve donc une valeur approchée de 26 minutes.

5. a)

$$\begin{aligned} D_0 &= f\left(\frac{0}{60}\right) - f\left(\frac{1}{60}\right) \\ &= f(0) - f\left(\frac{1}{60}\right) \\ &= 200e^0 + 25 - \left(200e^{-\frac{6}{60}} + 25\right) \\ &= 200 - 200e^{-1/10} \\ &\approx 19,03 \end{aligned}$$

et donc 19 est bien une valeur approchée de $\mathcal{D}_0$ à $0,1$ près, ce qui signifie que la température diminue d'environ 19°C en une minute à la sortie du four.

b)

$$\begin{aligned} D_n &= f\left(\frac{n}{60}\right) - f\left(\frac{n+1}{60}\right) \\ &= 200e^{-6\times\frac{n}{60}} + 25 - \left(200e^{-6\times\frac{n+1}{60}} + 25\right) \\ &= 200e^{-0,1n} - 200e^{-0,1n} \times e^{-0,1} \\ &= 200e^{-0,1n}\left(1 - e^{-0,1}\right) \end{aligned}$$

Pour étudier le sens de variation de la suite (D_n), on étudie le signe de

$$\begin{aligned} D_{n+1} - D_n &= 200e^{-0,1(n+1)}\left(1 - e^{-0,1}\right) - 200e^{-0,1n}\left(1 - e^{-0,1}\right) \\ &= 200e^{-0,1n}\left(1 - e^{-0,1}\right)\left[e^{-0,1} - 1\right] \\ &= -200e^{-0,1n}\left(1 - e^{-0,1}\right)^2 \end{aligned}$$

Dans cette expression, on a $200e^{-0,1n} \geqslant 0$ et $\left(1 - e^{-0,1}\right)^2 \geqslant 0$ d'où, $D_{n+1} - D_n \leqslant 0$ et donc que la suite D_n est décroissante.

On a de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} 200e^{-0,1n} = 0$ d'où, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} D_n = 0$.

Cette limite est logique puisqu'on a vu que la température tend à se stabiliser à la température ambiante, et donc la diminution de température tend bien vers 0.