Baccalauréat générale
Épreuve d'enseignement de spécialité
– Mathématiques –

Corrigé du sujet 2 – 15 mars 2021

Exercice 1 — Commun à tous les candidats — 5 points

PARTIE I

1. **d.** $0,76$

   Il s'agit de $P(X=0)=\binom{9}{0}\times 0,03^0\times 0,97^9\approx 0,76$.

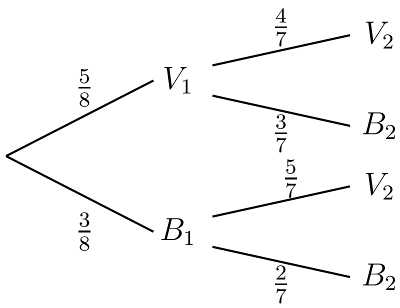
2. **c.** $\binom{9}{2}\times 0,97^7\times 0,03^2$

   Il s'agit de $P(X=2)=\binom{9}{2}\times 0,03^2\times 0,97^7$.

3. **d.** $1-P(X=0)$

   Il s'agit de $P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)$.

PARTIE II



4. **b.** $\dfrac{4}{7}$

   D'après l'arbre, $P_{V_1}(V_2)=\dfrac{4}{7}$.

5. **a.** $\dfrac{5}{8}$

   D'après l'arbre, formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(V_2) &= P(V_1\cap V_2)+P(B_1\cap V_2)\\ &= \frac{5}{8}\times\frac{4}{7}+\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}=\frac{20}{56}+\frac{15}{56}=\frac{5}{8}\end{aligned}$$

Exercice 2 — Commun à tous les candidats — 6 points

1. a) $u_1=u_0+v_0=1+1=2$ et $v_1=2\times u_0+v_0=2\times 1+1=3$.

   b) On a, pour tout n, $v_{n+1}=2u_n+v_n \iff v_{n+1}-v_n=2u_n$.
   Comme on admet que la suite (u_n) est strictement positive on en déduit donc que, pour tout n, $v_{n+1}-v_n=2u_n>0$ c'est-à-dire que la suite (v_n) est strictement croissante.

   Comme, de plus, $v_0=1$, on en déduit que, pour tout entier n, $v_n\geqslant v_0=1$.

   c) Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : $u_n\geqslant n+1$.

   — **Initialisation**
   Pour $n=0$, $u_n=u_0=1$ et $n+1=1$ donc $u_n\geqslant n+1$; $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— **Hérédité**
Supposons que, pour un certain entier n, $\mathcal{P}_n$ est vraie, c'est-à-dire que $u_n \geqslant n+1$.
On a alors $u_{n+1} = u_n + v_n \geqslant n+1+v_n$.
Or, d'après la question précédente, on a $v_n \geqslant 1$, ce qui implique donc que $u_{n+1} \geqslant n+1+v_n \geqslant n+2$, et qui montre que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est aussi vraie.

— **Conclusion** On vient donc de démontrer, d'après le principe de récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n : u_n \geqslant n+1$ est vraie pour tout entier n.

d) Pour tout entier n, on a $u_n \geqslant n+1$, et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$, donc par comparaison, corollaire du théorème des gendarmes, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. a) $(-1)^{n+1}$ vaut soit -1 soit 1 selon la parité de n et donc $-1 \leqslant (-1)^{n+1} \leqslant 1$.
En divisant par $u_n > 0$ donc $u_n^2 > 0$, on obtient alors

$$-\frac{1}{u_n^2} \leqslant \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \frac{1}{u_n^2}$$

b) On a vu que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^2 = +\infty$, et alors $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{u_n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n^2} = 0$.
On en déduit, d'après le théorème des gendarmes et la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} = 0$.

c) $r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} = 0$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n^2 = 2$.
On en déduit donc (r_n) converge bien vers $\sqrt{2}$.

d) Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{2u_n+v_n}{u_n+v_n} \\ &= \frac{u_n\left(2+\dfrac{v_n}{u_n}\right)}{u_n\left(1+\dfrac{v_n}{u_n}\right)} \\ &= \frac{2+\dfrac{v_n}{u_n}}{1+\dfrac{v_n}{u_n}} = \frac{2+r_n}{1+r_n} \end{aligned}$$

e) La valeur de $n=5$ renvoyée par ce programme correspond à la plus petite valeur de n pour laquelle la distance entre r_n et $\sqrt{2}$ est inférieure ou égale à 10^{-4}.

Exercice 3 Commun à tous les candidats 4 points

1. a) Pour montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC), il suffit de démontrer que ce vecteur est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABC), par exemple $\overrightarrow{AB}(-2\ ;\ 3\ ;\ 0)$ et $\overrightarrow{AC}(-2\ ;\ 0\ ;\ 1)$ qui ne sont pas colinéaires.
On a $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n} = -2\times3+3\times2+0\times6 = 0$ donc $\overrightarrow{AB} \perp \vec{n}$, et par ailleurs $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n} = -2\times3+0\times2+1\times6 = 0$ donc $\overrightarrow{AC} \perp \vec{n}$.
Le vecteur $\vec{n}$ est donc bien normal au plan (ABC).

b) D'après la question précédente, le plan (ABC) a une équation cartésienne qui peut s'écrire sous la forme $3x+2y+6z+d=0$.
De plus, A est un point de ce plan, donc $3\times2+2\times0+6\times0+d=0 \iff d=-6$.
Le plan (ABC) a donc pour équation cartésienne $3x+2y+6z-6=0$.

2. a) La droite d est orthogonale au plan (ABC) donc elle a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{n}$ normal à (ABC).
De plus elle passe par l'origine $O(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$, d'où la représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3t \\ y & = & 2t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z & = & 6t \end{array}\right.$$

b) La droite d coupe le plan (ABC) au point H donc ses coordonnées vérifient le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{\mathrm{H}} & = & 3t \\ y_{\mathrm{H}} & = & 2t \\ z_{\mathrm{H}} & = & 6t \\ 3x_{\mathrm{H}} + 2y_{\mathrm{H}} + 6z_{\mathrm{H}} - 6 & = & 0 \end{array}\right.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} & 3 \times 3t + 2 \times 2t + 6 \times 6t - 6 = 0 \\ \iff & 9t + 4t + 36t = 6 \\ \iff & t = \frac{6}{49} \end{aligned}$$

On trouve alors les coordonnées du point d'intersection H par

$$\left\{\begin{array}{lclcl} x_H & = & 3t & = & \dfrac{18}{49} \\ y_H & = & 2t & = & \dfrac{12}{49} \\ z_H & = & 6t & = & \dfrac{36}{49} \end{array}\right.$$

qui sont bien les coordonnées recherchées.

c)

$$\begin{aligned} OH &= \sqrt{(x_H - x_O)^2 + (y_H - y_O)^2 + (z_H - z_O)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{18}{49}\right)^2 + \left(\frac{12}{49}\right)^2 + \left(\frac{36}{49}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1764}{49^2}} = \frac{6}{7} \end{aligned}$$

3. — En prenant le triangle OAB pour base de la pyramide OABC, la hauteur est OC, et le volume est égal à

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{OAB} \times \mathrm{OC}$$

avec l'aire du triangle OAB.

$$\mathcal{A}_{OAB} = \frac{1}{2} \times \mathrm{OA} \times \mathrm{OB} = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$$

et $\mathrm{OC} = 1$ et donc

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times 3 \times 1 = 1$$

— En prenant le triangle ABC pour base de la pyramide OABC, la hauteur est OH, et le volume est égal à

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times \mathrm{OH}$$

d'où

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{3\mathcal{V}}{OH} = \frac{3}{\frac{6}{7}} = \frac{7}{2}$$

EXERCICE au choix du candidat — 5 points

Exercice A

1. a) Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont les solutions de l'équation

$$\begin{aligned} f(x)=g(x) &\iff x^2e^{-x}=e^{-x} \\ &\iff (x^2-1)e^{-x}=0 \end{aligned}$$

Pour tout réel x, $e^{-x}>0$ donc en particulier $e^{-x}\neq 0$, et alors

$$f(x)=g(x) \iff x^2-1=0 \iff x=-1 \text{ ou } x=1$$

Pour $x=-1$, $g(x)=e$, et pour $x=1$, $g(x)=e^{-1}$.
Les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont donc $(-1\ ;\ e)$ et $(1\ ;\ e^{-1})$.

b) La position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ est donnée par le signe de $f(x)-g(x)=(x^2-1)e^{-x}$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	
e^{-x}		$+$	|	$+$	|	$+$	
$(x^2-1)e^{-x}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc sur les intervalles $]-\infty\ ;\ -1[$ et $]1\ ;\ +\infty[$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$, et sur l'intervalle $]-1\ ;\ 1[$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous de la courbe $\mathcal{C}_g$,

2. a) On dérive le produit

$$\begin{aligned} d'(x) &= (-1)e^{-x}-\left(2x\times e^{-x}+x^2\times(-1)e^{-x}\right) \\ &= e^{-x}\left(-1-2x+x^2\right) \\ &= e^{-x}\left(x^2-2x-1\right) \end{aligned}$$

b) Le trinôme du second degré x^2-2x-1 a poiur discriminant $\Delta=8>0$ et admet donc deux racines réelles distinctes $x_1=\dfrac{2-\sqrt{8}}{2}=1-\sqrt{2}$ et $x_2=1+\sqrt{2}$.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
e^{-x}		$+$	|	$+$	|	$+$	
x^2-2x-1		$+$	0	$-$	0	$+$	
$d'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
d		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

On en déduit donc, en se restreignant à l'intervalle $[-1;1]$,

x	-1		$1-\sqrt{2}$		1
d		$\nearrow$		$\searrow$	

c) D'après la question précédente, la distance $d(x)$ est maximale pour $x_0=1-\sqrt{2}$, et vaut

$$\begin{aligned} d\left(1-\sqrt{2}\right) &= \left(1-\left(1+2-2\sqrt{2}\right)\right)e^{-1+\sqrt{2}} \\ &= \left(2\sqrt{2}-2\right)e^{-1+\sqrt{2}}\approx 1,3 \end{aligned}$$

3. Pour déterminer le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$, on peut penser au théorème des valeurs intermédiaires, ou théorème de la bijection.

   On étudie pour cela la fonction h qui est contineu sur $\mathbb{R}$.

   On a $h'(x) = -e^{-x} - 1$ donc, comme $e^{-x} > 0$, on a $h'(x) < -1 < 0$ et la fonction h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

   — $h(-1) = e^1 + 1 - 2 = e - 1 > 0$; comme h est strictement décroissante, $h(x) > 0$ pour $x < -1$, donc h ne s'annule pas sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -1[$.

   — $h(0) = e^0 - 2 = -1 < 0$; comme h est strictement décroissante, $h(x) < 0$ pour $x > 0$, donc h ne s'annule pas sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

   — Sur l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$, la fonction h est continue et strictement décroissante, et on sait que $h(-1) > 0$ et $h(0) < 0$, et donc l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique.

   La droite Δ et la courbe $\mathcal{C}_g$ ont donc un unique point d'intersection dont l'abscisse est comprise entre -1 et 0.

Exercice B

Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = \ln(x) + 2x - 2$.

1. En $+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x - 2 = +\infty$ donc, par addition des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

   De même, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to0} 2x - 2 = -2$ donc, par addition, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x) = -\infty$.

2. La fonction g est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, avec $g'(x) = \dfrac{1}{x} + 2 > 2 > 0$ et donc la fonction g est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

3. La fonction g est continue (car même dérivable) sur $[0; +\infty[$, strictement croissante, et avec $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x) = -\infty$. et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

   On en déduit, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, ou théorème de la bijection, que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\ ;\ +\infty[$.

4. Comme $g(1) = 0$ donc l'unique solution précédente est en fait $\alpha = 1$, et on déduit, comme g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ que

   — sur $]0\ ;\ 1[$, $x < 1 \iff g(x) < g(1) = 0$: g est strictement négative

   — sur $]1; +\infty[$, $x > 1 \iff g(x) < g(1) = 0$: g est strictement positive

Partie II : étude d'une fonction *f*

On considère la fonction f, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$par : $f(x) = \left(2 - \dfrac{1}{x}\right)[\ln(x) - 1]$.

1. a) On dérive le produit $f = uv$ avec $u(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$ donc $u'(x) = \dfrac{1}{x^2}$ et $v(x) = \ln(x) - 1$ donc $v'(x) = \dfrac{1}{x}$.

   On obtient alors $f' = u'v + uv'$, soit

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2}(\ln(x) - 1) + \left(2 - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{x} \\ &= \frac{\ln(x) - 1 + 2x - 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

   b) D'après la partie précédente, on a

x	0		1		$+\infty$
x^2	||	$+$	|	$+$	
$g(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
f	||	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

2.

$$\begin{aligned} f(x)=0 &\iff \left(2-\frac{1}{x}\right)(\ln(x)-1)=0 \\ &\iff 2-\frac{1}{x}=0 \text{ ou } \ln(x)-1=0 \\ &\iff x=\frac{1}{2} \text{ ou } x=e \end{aligned}$$

L'équation $f(x)=0$ admet donc deux solutions sur $]0\ ;\ +\infty[$: $x=\dfrac{1}{2}$ et $x=e$.

On en déduit, à l'aide de la question précédente, le tableau de signes de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$:

x	0		$\frac{1}{2}$		e		$+\infty$
$f(x)$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

Partie III : étude d'une fonction F admettant pour dérivée la fonction f

1. On a $F'=f$, donc, d'après le résultat de la question précédente

x	0		$\frac{1}{2}$		e		$+\infty$
$F'(x)=f(x)$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	
F	||	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

2. Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a à la courbe $\mathcal{C}_F$ est $F'(a)=f(a)$. 4

   On cherche donc les abscisses a telles que

$$F'(a)=f(a)=0$$

   On a déjà résolu cette équation précédemment, et la courbe $\mathcal{C}_F$ admet donc deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses, en $x=\frac{1}{2}$ et en $x=e$.