Baccalauréat générale – Corrigé
Épreuve d'enseignement de spécialité
– Mathématiques –

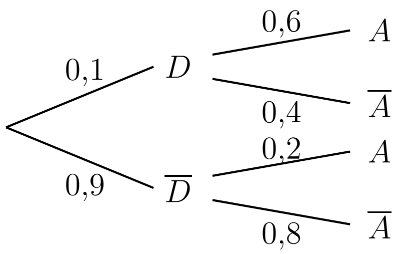
15 mars 2021 (Sujet 1)

Durée de l'épreuve : **4 heures**

Exercice 1, commun à tous les candidats **5 points**

Partie 1

1.



2. La probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école est :

$$P(D \cap A) = 0,1 \times 0,6 = 0,06$$

3. La probabilité de l'évènement A est, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(D \cap A) + P(\overline{D} \cap A) \\ &= 0,06 + 0,9 \times 0,2 = 0,24 \end{aligned}$$

4. La probabilité que le dossier n'ait pas été sélectionné, sachant qu'il a été admis à l'école, est

$$P_A(\overline{D}) = \frac{P(\overline{D} \cap A)}{P(A)} = \frac{0,18}{0,24} = 0,75$$

Partie 2

1. a) La probabilité du succés, un candidat d'être admis à l'école, est $p = 0,24$, et on choisit un échantillon de $n = 7$ candidats.
   La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}\,(7\,;\,0,24)$.

   b) La probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école est :

$$P(X = 1) = \binom{7}{1} \times 0,24^1 \times (1 - 0,24)^{7-1} \approx 0,32$$

   c) La probabilité qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école est :

$$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1) = 1 - 0,47 = 0,53$$

2. a) La variable aléatoire Y qui donne le nombre d'admis parmi les n candidats présentés suit la loi binomiale $\mathcal{B}\,(n; 0,24)$.
   La probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école est donc

$$P(Y = 0) = \binom{n}{0} \times 0,24^0 \times 0,76^n = 0,76^n$$

b) On cherche à partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est supérieure ou égale à $0,99$,

$$\begin{aligned} P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,99 &\iff 1 - P(Y=0) \geqslant 0,99 \\ &\iff P(Y=0) \leqslant 0,01 \\ &\iff 0,76^n \leqslant 0,01 \\ &\iff \ln\left(0,76^n\right) \leqslant \ln(0,01) \\ &\iff n \times \ln(0,76) \leqslant \ln(0,01) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,76)} \simeq 16,8 \end{aligned}$$

car $\ln(0,76) < \ln(1) < 0$.

On trouve donc qu'à partir de 17 élèves la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est supérieure ou égale à $0,99$.

Exercice 2 — 5 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. a) D'après le théorème de croissances comparées, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

   b) On cherche la limite de f en 0.

   On a $\lim\limits_{x \to 0} e^x = 1$ d'où, par quotient de limites, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, ce qui montre que l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$.

2. Pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, on a, en dérivant le quotient $f = \dfrac{u}{v}$,

$$f'(x) = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

3. On cherche le signe de $f'(x)$, pour obtenir les variations de f,

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
x^2	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

   avec $f(1) = \dfrac{e^1}{1} = e$

4. D'après le tableau de variations et le théorème des valeurs intermédiaires, f étant continue sur $\mathbb{R}$ et strictement décroissante sur $]0;1[$ et strictement croissante sur $[1;+\infty[$, on a
   — si $m < e$, l'équation $f(x) = m$ n'admet pas de solution ;
   — si $m = e$, l'équation $f(x) = m$ admet une solution unique $x = 1$;
   — si $m > e$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions.

5. a) La tangente en a est parallèle à la droite Δ si et seulement si le coefficient directeur de la tangente est égal à -1, autrement dit quand $f'(a) = -1$, et donc

$$\begin{aligned} f'(a) = -1 \quad &\iff \frac{e^a(a-1)}{a^2} = -1 \\ &\iff e^a(x-1) = -a^2 \\ &\iff e^a(x-1) + a^2 = 0 \end{aligned}$$

ce qui veut dire que le nombre a est solution de l'équation $e^x(x-1) + x^2 = 0$.

b) $g'(x) = e^x \times (x-1) + e^x \times 1 + 2x = xe^x + 2x$

Sur $[0\ ;\ +\infty[$ on a $x \geq 0$ et $2x \geq 0$ ainsi que $e^x > 0$ d'où $g'(x) = xe^x + 2x \geqslant 0$.

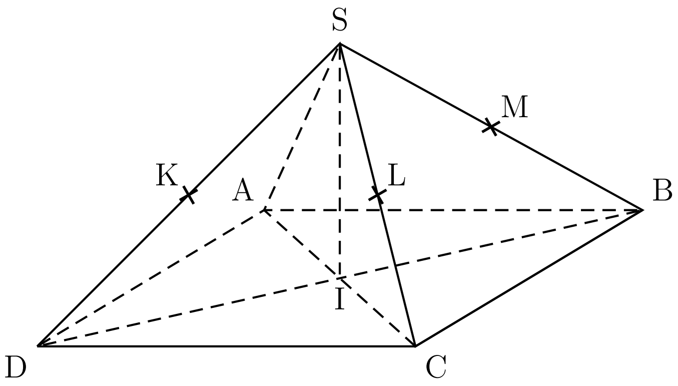
On dresse alors le tableau de variations

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	

c) On a, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et par produit et somme de limite, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Ainsi, comme g est continue sur $[0; +\infty[$, strictement croissante, et que $g(0) = -1 < 0$ et avec la limite précédente, on a, d'après le téorème de la bijection (ou théorème des valeurs intermédiaires), qu'il existe une unique solution a à l'équation $g(x) = 0$, et donc il existe un unique point A en lequel la tangente à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.

Exercice 3 — Commun à tous les candidats — 5 points



1. **Réponse c.**

   On peut procèder par élimination :
   — Les droites (DK) et (SD) sont sécantes en D donc coplanaires ; on élimine **a.**
   — Les droites (AS) et (IC) sont sécantes en A donc coplanaires ; on élimine **b.**
   — Les droites (LM) et (AD) sont toutes deux parallèles à (BC) donc parallèles entre elles ; elles sont donc coplanaires ; on élimine **d.**

2. **Réponse b.**

   On calcule les coordonnées des milieux : le milieu K de [SD] a pour coordonnées $\left(0\ ;\ -\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$, et le milieu L de [SC] a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$, et enfin le milieu N de [KL] a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}\ ;\ -\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

3. **Réponse b.**

4. **Réponse c.**

   La droite (AS) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AS}\,(1\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et donc la seule représentation qui convienne est la c.

5. **Réponse b.**

   On peut là aussi procèder par élimination :
   — Le plan d'équation $y+z-1=0$ ne contient pas $\mathrm{C}\,(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$; on élimine **a.**
   — Le plan d'équation $x-y+z=0$ ne contient pas $\mathrm{S}\,(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$; on élimine **c.**
   — Le plan d'équation $x+z-1=0$ ne contient pas $\mathrm{B}\,(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$; on élimine **d.**

Exercice au choix du candidat — 5 points

Exercice A

1. Pour $n=0$, $u_1=\dfrac{3}{4}u_0+\dfrac{1}{4}\times 0+1=\dfrac{3}{4}\times 1+1=\dfrac{7}{4}$.
   Pour $n=1$, $u_1=\dfrac{3}{4}u_1+\dfrac{1}{4}\times 1+1=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{7}{4}+\dfrac{1}{4}+1=\dfrac{41}{16}$.

2. a) La formule, étirée ensuite vers le bas, que l'on peut écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B est :
   $\boxed{= 3/4 * \mathrm{B2} + 1/4 * \mathrm{A2} + 1}$

   b) La suite (u_n) semble croissante.

3. a) Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : $n\leqslant u_n\leqslant n+1$.

   Initialisation

   Pour $n=0$, $u_0=1$ et $0\leqslant 1\leqslant 1$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

   Hérédité

   Supposons que, pour un certain entier n, $\mathcal{P}_n$ est vraie, c'est-à-dire : $n\leqslant u_n\leqslant n+1$.
   Alors,

$$\begin{aligned}
& n\leqslant u_n\leqslant n+1\\
\iff\ & \frac{3}{4}n\leqslant\frac{3}{4}u_n\leqslant\frac{3}{4}(n+1)\\
\iff\ & \frac{3}{4}n+\frac{1}{4}n\leqslant\frac{3}{4}u_n+\frac{1}{4}n\leqslant\frac{3}{4}(n+1)+\frac{1}{4}n\\
\iff\ & n\leqslant\frac{3}{4}u_n+\frac{1}{4}n\leqslant n+\frac{3}{4}\\
\iff\ & n+1\leqslant\frac{3}{4}u_n+\frac{1}{4}n+1\leqslant n+\frac{3}{4}+1\\
\iff\ & n+1\leqslant u_{n+1}\leqslant n+\frac{7}{4}\leqslant n+2
\end{aligned}$$

   ce qui montre que la propriété est encore vraie au rang $n+1$.

   Conclusion On vient donc de démonter, d'après le principe de récurrence, que, pour tout entier $n\geqslant 0$, $n\leqslant u_n\leqslant n+1$.

   b) D'après la question précédente, pour tout n, $n\leqslant u_n\leqslant n+1$ donc aussi, au rang suivant, $n+1\leqslant u_{n+1}\leqslant n+2$.
   On a alors,

$$n\leqslant u_n\leqslant n+1\leqslant u_{n+1}\leqslant n+2$$

   et donc, entre autre que $u_n\leqslant u_{n+1}$, c'est-à-dire que la suite (u_n) est croissante.

   On a aussi de ces inégalités que $n\leqslant u_n$, et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ donc, par comparaison (corollaire du théorème des gendarmes), $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

c) Pour tout n, $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ donc on a aussi

$$1 \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1$, donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 1$.

4. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$

a) Pour tout n, $v_n = u_n - n$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - (n+1) \\ &= \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 - n - 1 \\ &= \frac{3}{4}u_n - \frac{3}{4}n \\ &= \frac{3}{4}(u_n - n) \\ &= \frac{3}{4}v_n \end{aligned}$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 = 1$

b) On en déduit que, pour tout n,

$$v_n = v_0 \times q^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

et donc aussi que

$$u_n = v_n + n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$$

Exercice B $f(x) = x + 4 - 4\ln(x) - \dfrac{3}{x}$, sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. En $+\infty$, $f(x) = x\left(1 - 4\dfrac{\ln(x)}{x}\right) + 4 - \dfrac{3}{x}$

avec par croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - 4\dfrac{\ln(x)}{x}\right) + 4 = +\infty$

et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2. $f'(x) = 1 + 0 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{x^2} = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$

3. a) Le trinôme du second degré au numérateur $x^2 - 4x + 3$ a pour discriminant $\Delta = 4 > 0$ et admet donc deux racines distinctes $x = 1$ et $x = 3$ et alors

x	0		1		3		$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$		$+$	0	$-$	0	$-$	
x^2	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	2	↘	$6 - 4\ln(3) \approx 1,61$	↗	$+\infty$

avec les valeurs particulières $f(1) = 1 + 4 - 4\ln(1) - \dfrac{3}{1} = 2$; $f(3) = 3 + 4 - 4\ln(3) - \dfrac{3}{3} = 6 - 4\ln(3) \approx 1,69$

b) D'après le tableau de variations, l'équation $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet une solution dans $]0;1[$, une dans $]1;3[$ et enfin une dans $]3;+\infty[$ car $\dfrac{5}{3} > f(3) \simeq 1,61$

Cette équation admet donc trois solutions dans $]0\ ;\ +\infty[$.

4. La convexité de f est donnée par le signe de la dérivée seconde :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$$

donc

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x-4)\times x^2 - (x^2-4x+3)\times 2x}{x^4} \\ &= \frac{(2x^2-4x-2x^2+8x-6)\times x}{x^4} \\ &= \frac{4x-6}{x^3} \end{aligned}$$

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$4x-6$		$-$	0	$+$	
x^3	0	$+$		$+$	
$f''(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
	$\|\|$	f concave		f convexe	

La dérivée seconde s'annule et change de signe pour $x = \dfrac{3}{2}$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion d'abscisse $\dfrac{3}{2}$.

$f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{3}{2} + 4 - 4\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) - \dfrac{3}{\frac{3}{2}} = \dfrac{11}{2} - 4\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) - 2 = \dfrac{7}{2} - 4\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$

La courbe $\mathcal{C}$ admet donc un unique point d'inflexion de coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}\ ;\ \dfrac{7}{2} - 4\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)\right)$.