Corrigé du baccalauréat général

Épreuve d'enseignement de spécialité – Mathématiques –

**13 mars 2023**

**Exercice 1 QCM** **5 points**

**Question 1 : réponse c.**. On factorise par les termes prépondérants :

$$u_n = \frac{2^n\left(1+\frac{1}{2^n}\right)}{5^n\left(3+\frac{1}{5^n}\right)} = \left(\frac{2}{5}\right)^n \frac{1+\frac{1}{2^n}}{3+\frac{1}{5^n}}$$

où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{5^n} = 0$ et, comme $-1 < \frac{2}{5} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$, d'où le résultat par produit et quotient des limites.

**Question 2 : réponse b.** On dérive un produit $f = uv$ avec $u(x) = x^2$ donc $u'(x) = 2x$ et $v(x) = \ln x$ donc $v'(x) = \frac{1}{x}$, d'où $f' = u'v + uv'$ donc

$$f'(x) = 2x\ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = x\left(2\ln x + 1\right)$$

**Question 3 : réponse a.** Comme $H' = h$ et que $h < 0$ sur $]-\infty; 1]$, on en déduit que $H$ est décroissante sur $]-\infty; 1]$. Comme de plus $H(0) = 0$, on en déduit que $H$ est positive sur $]-\infty; 0]$.

**Question 4 : réponse a.** Il s'agit de l'algorithme de recherche d'une solution approchée par dichotomie.

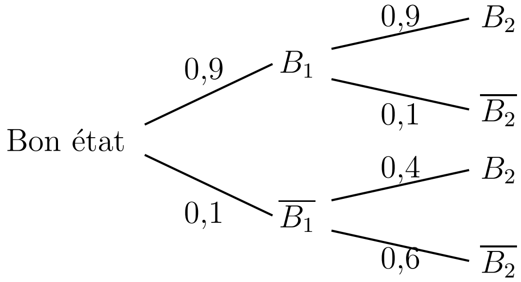
**Question 5 : réponse d.** On répète 3 fois l'expérience aléatoire : "tirer une boule". Comme ces tirages sont avec remise, ils sont identiques et indépendants. On peut noter $X$ la variable aléatoire égale au nombre de succès : "tirage d'une boule vertes" de probabilité $p = \frac{3}{10}$.
$X$ suit donc la loi binomiale de paramètre $n = 3$ et $p$, et la probabilité recherchée est $P(X = 2)$ donnée par la formule de la réponse **d.**

**Exercice 2** **6 points**

Dans une grande ville française, des trottinettes électriques sont mises à disposition des usagers. Une entreprise, chargée de l'entretien du parc de trottinettes, contrôle leur état chaque lundi.

**Partie A**

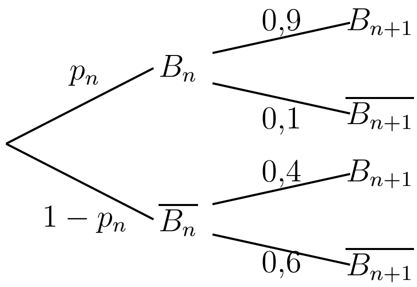
1. $p_1 = P(B_1) = 0,9$.
   Pour $p_2$, on peut représenter la situation par un arbre :




   D'après cet arbre, ou la formule des probabilités totales,

$$p_2 = P(B_2) = 0,9^2 + 0,1 \times 0,4 = 0,85$$

2.




3. D'après cet arbre, ou la formule des probabilités totales,

$$p_{n+1} = P(B_{n+1}) = 0,9p_n + 0,4(1-p_n) = 0,5p_n + 0,4$$

4. a) Soit, pour tout entier naturel $n$, $P(n) : p_n \geqslant 0,8$
**Initialisation.** Pour $n=0$, on a $p_0 = 1 \geqslant 0,8$, et donc $P(0)$ est vraie.
**Hérédité.** Supposons que $P(n)$ soit vraie pour un certain entier $n$, c'est-à-dire $p_n \geqslant 0,8$.
Alors, en multiplinat par $0,5 > 0$, on obtient $0,5p_n \geqslant 0,5 \times 0,8 = 0,4$,
puis en ajoutant 0,4 on obtient $0,5p_n + 0,4 \geqslant 0,4 + 0,4 = 0,8$,
c'est-à-dire que $p_{n+1} \geqslant 0,8$.
Ainsi, $P(n+1)$ est encore vraie.
**Conclusion.** On vient donc de démontrer, d'après le principe de récurrence, que $P(n) : p_n \geqslant 0,8$ est vraie pour tout entier naturel $n$.

b) Ce résultat permet de dire que, à chaque début de semaine, au moins 80% des trotinettes sont en bon état de marche.

5. a) Pour tout entier $n$, on a

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,8 = 0,5p_n + 0,4 - 0,8 = 0,5p_n - 0,4$$

or $p_n = u_n + 0,8 =$, et donc

$$u_{n+1} = 0,5\,(u_n + 0,8) - 0,4 = 0,5u_n$$

Ainsi, la suite $(u_n)$ est géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $u_0 = p_0 - 0,8 = 0,2$.

b) On en déduit que, pour tout entier $n$, $u_n = u_0q^n = 0,2 \times 0,5^n$.
On trouve alors que

$$p_n = u_n + 0,8 = 0,2 \times 0,5^n + 0,8$$

c) Comme $-1 < 0,5 < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^n = 0$ et donc que

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = 0,8$$

**Exercice 3** **6 points**

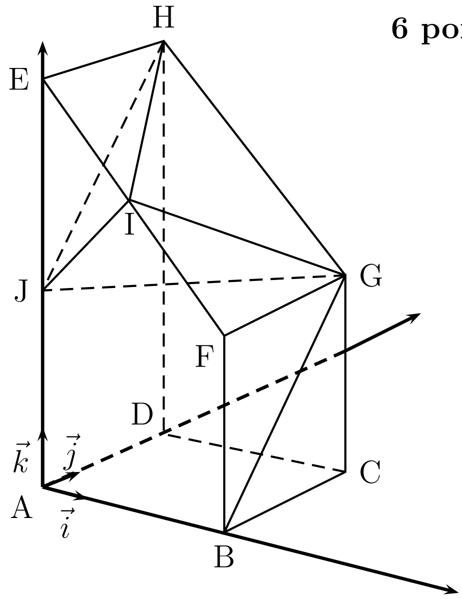
**Partie B**

Dans cette partie, on modélise la situation de la façon suivante :
— l'état d'une trottinette est indépendant de celui des autres;
— la probabilité qu'une trottinette soit en bon état est égale à $0,8$.

On note $X$ la variable aléatoire qui, à un lot de 15 trottinettes, associe le nombre de trottinettes en bon état.
Le nombre de trottinettes du parc étant très important, le prélèvement de 15 trottinettes peut être assimilé à un tirage avec remise.

1. On répète $n = 15$ fois l'expérience aléatoire (expérience de Bernoulli) "prélever une trotinnette" dont le succès est "la trotinette est en bon état" de probabilité $p = 0,8$.
   Ces répétitions sont supposées identiques et indépendantes car le tirage peut être assimilé à un tirage avec remise.
   Enfin la variable aléatoire $X$ est égale au nombre de succès, c'est-à-dire au nombre de trotinettes en bon état dans ce lot de 15.
   $X$ suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,8$.
2. La probabilité que les 15 trottinettes soient en bon état est $P(X = 15) = (1-p)^{15} \simeq 0,035$
3. La probabilité qu'au moins 10 trottinettes soient en bon état dans un lot de 15 est, à l'aide de la calculatrice, $P(X \geqslant 10) \simeq 0,94$
4. L'espérance $E(X) = 12$ indique que, en moyenne sur un grand nombre de lots de 15 trotinettes, il y en a 12 en bon état.

**Exercice 3** **6 points**




On considère le prisme droit ABFEDCGH, de base ABFE, trapèze rectangle en A.
On associe à ce prisme le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ tel que :

$$\vec{i} = \frac{1}{4}\vec{AB}, \quad \vec{j} = \frac{1}{4}\vec{AD}, \quad \vec{k} = \frac{1}{8}\vec{AE}.$$

De plus on a $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE}$.
On note $I$ le milieu du segment $[EF]$.
On note $J$ le milieu du segment $[AE]$.

1. $I$ est le milieu de $[EF]$ avec $E(0;0;8)$ et $F(4;0;4)$ d'où $I(2;0;6)$.
   On a directement aussi que $J(0;0;4)$.
2. Soit $\vec{n}(-1;1;1)$.
   a) On a $G(4;4;4)$ et donc $\overrightarrow{IG}(2;4;-2)$ et alors $\vec{n} \cdot \overrightarrow{IG} = -1 \times 2 + 1 \times 4 + 1 \times (-2) = 0$.
   De même, $\overrightarrow{JG}(4;4;0)$ et donc $\vec{n} \cdot \overrightarrow{JG} = -1 \times 4 + 1 \times 4 + 1 \times 0 = 0$.
   Ainsi, $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $(IGJ)$ et il est donc normal à ce plan.
   b) D'après ce qui précède, une équation cartésienne du plan $(IGJ)$ s'écrit sous la forme $-x + y + z + d = 0$.
   Or $J(0;0;4)$ appartient à ce plan, et donc $-0 + 0 + 4 + d = 0 \iff d = -4$, d'où une équation cartésienne de $(IGJ)$ :
   $$(IGJ) : -x + y + z - 4 = 0$$
3. La droite $d$ perpendiculaire au plan $(IGJ)$ a donc pour vecteur directeur $\vec{n}$ et passant par $H(0;4;8)$ a pour représentation paramétrique
   $$d : \left\{\begin{array}{rcrcl} x & = & & - & t \\ y & = & 4 & + & t \\ z & = & 8 & + & t \end{array}\right. ,\ t \in \mathbb{R}$$
4. $L(x;y;z)$ est donc un point de la droite $d$ et du plan $(IGJ)$. Ces coordonnées vérifient donc la représentation paramétrique de $d$ ainsi que l'équation cartésienne du plan $(IGJ)$, soit $-x+y+z-4 = 0$, et donc avec les relations paramétriques
   $$-(-t) + (4+t) + (8+t) - 4 = 0 \iff t = -\frac{8}{3}$$

d'où les coordonnées de $L$, dans la représentation paramétrique de $d$ :

$$L : \begin{cases} x & = & & - & t & = & \dfrac{8}{3} \\ y & = & 4 & + & t & = & \dfrac{4}{3} \\ z & = & 8 & + & t & = & \dfrac{16}{3} \end{cases}$$

5. Comme $L$ est le projeté orthogonal de $H$ sur le plan $(IGJ)$, on déduit que la distance de $H$ à ce plan est justement $LH$, soit

$$LH = \sqrt{\left(\frac{8}{3}-0\right)^2 + \left(\frac{4}{3}-4\right)^2 + \left(\frac{16}{3}-8\right)^2} = \sqrt{\frac{3\times 8^2}{9}} = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

6. On a $\overrightarrow{IG}(2;4;-2)$ et $\overrightarrow{IJ}(-2;0;-2)$ d'où $\overrightarrow{IG}\cdot\overrightarrow{IJ} = 2\times(-2)+4\times 0+(-2)\times(-2) = 0$, c'est-à-dire que $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont orthogonaux, ou encore que le triangle $IGJ$ est rectangle en $I$.
7. On peut calculer le volume du tétraèdre $IGJH$ en prenant le triangle $IGJ$ comme base et la hauteur $HL$ associée.
   L'aire du triangle rectangle $IJG$ est $\mathcal{A}_{IJG} = \dfrac{IJ\times IG}{2}$ avec $IJ = \sqrt{2^2+0^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et $IG = \sqrt{2^2+4^2+2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
   Finalement, le volume est
   $$V = \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}{2}\times\frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{10}{3}}$$

**Exercice 4** **3points**

Un biologiste a modélisé l'évolution d'une population de bactéries (en milliers d'entités) par la fonction $f$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(t) = \mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^{-0,5t^2+t+2}$$

où $t$ désigne le temps en heures depuis le début de l'expérience.

À partir de cette modélisation, il propose les trois affirmations ci-dessous.
Pour chacune d'elles, indiquer, en justifiant, si elle est vraie ou fausse.

- **Affirmation 1 : Vrai.**

On étudie pour cela les variations de $f$.
On a $f = e^3 - e^u$ avec $u(t) = -0,5t^2+t+2$ donc $u'(t) = -t+1$ et alors $f' = 0 - u'e^u$, soit

$$f'(t) = te^{-0,5t^2+t+2}$$

Comme $e^x > 0$ pour tout réel $x$, on a donc, pour $t\in[0;+\infty[$ que $f'(t)\geqslant 0$ et donc que $f$ est croissante, ce qui signifie, dans le contexte, que « La population augmente en permanence ».

- **Affirmation 2 : Faux.**

Il s'agit de déterminer la limite de $f$ lorsque $t\to+\infty$.
On a $-0,5t^2+t+2 = -0,5t^2\left(1-\dfrac{2}{t}-\dfrac{4}{t^2}\right)$ où $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{2}{t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{4}{t^2} = 0$
et donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -0,5t^2+t+2 = -\infty$.
On en déduit, par composition des limites, que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} e^{-0,5t^2+t+2} = 0$, et donc finalement que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = e^3$.
Or $e^3 \simeq 20,08 < 21$.
On a vu précédemment que $f$ est croissante, et donc ici que $f$ tend vers $e^3 < 21$ milliers. En particulier, la population ne dépassera jamais 21000 bactéries.

- **Affirmation 3 : Faux.**

La population de bactéries augmente strictement depuis $f(0) = e^3 - e^2 \simeq 12,7$ milliers.
Ainsi, la population de bactéries n'aura jamais un effectif de 10000.