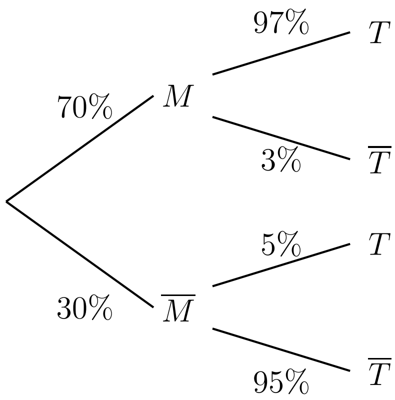
Baccalauréat général
Épreuve d'enseignement de spécialité
– Mathématiques –

12 mai 2022

Exercice 1 (7 points) **Thème : probabilités**

Partie A

1.



2. D'après l'arbre, la probabilité que le coyote soit malade et que son test soit positif est

$$P(\overline{M}\cap T) = 30\% \times 5\% = 1,5\%$$

3. D'après l'arbre, ou la formule des probabilités totales,

$$P(T) = 70\% \times 97\% + 30\% \times 5\% = 69,4\% = 0,694$$

4. La valeur prédictive positive du test est la probabilité conditionnelle

$$P_T(M) = \frac{P(M\cap T)}{P(T)} = \frac{70\% \times 97\%}{69,4\%} \simeq 0,978 = 97,8\%$$

5. a) Par analogie avec la question précédente, la « valeur prédictive négative du test » est la probabilité que le coyote ne soit effectivement pas malade sachant que son test est négatif, et vaut

$$P_{\overline{T}}(\overline{M}) = \frac{P(\overline{T}\cap\overline{M})}{P(\overline{T})} = \frac{30\% \times 95\%}{1-0,694} \simeq 0,931 = 93,1\%$$

b) La valeur prédictive positive est plus grande que celle négative : le test est donc plus fiable pour diagonostiquer un animal malade qu'un animal sain.

Partie B

1. a) On répète $n = 5$ fois l'expérience aléatoire "capturer un coyote", dont le succès est "le coyote a un test positif" de probabilité $p = 0,694$. Ces répétitions sont identiques et indépendantes (car on l'assimile à un tirage avec remise).

Enfin, la variable aléatoire X est égale au nombre de succès sur ces 5 répétitions, c'est-à-dire au nombre de coyotes dont le test est positif.

On en déduit que cette variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,694$.

b) La probabilité que dans un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard, un seul ait un test positif est, à l'aide de la calculatrice,

$$P(X = 1) \simeq 0,03$$

c) La probabilité qu'au moins quatre coyotes sur cinq aient un test positif est

$$P(X \geqslant 4) \simeq 0,52$$

ce qui montre que l'affirmation du vétérinaire est vraie.

2. On capture donc n coyotes, et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de coyotes ayant un test positif dans cet échantillon. Comme précédemment, Y suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,694$.
On cherche n tel que $P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,99$
On a
$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - (1 - 0,694)^n = 1 - 0,306^n$$
et donc
$$\begin{aligned} & P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,99 \\ \iff & 1 - 0,306^n \geqslant 0,99 \\ \iff & 0,306^n \leqslant 0,01 \end{aligned}$$
soit, en prenant le logarithme qui est strictement croissant (donc l'ordre est conservé), puis en divisant par $\ln(0,306) < 0$ (donc l'ordre est changé) :
$$\begin{aligned} & P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,99 \\ \iff & \ln\left(0,306^n\right) = n\ln(0,306) \leqslant \ln(0,01) \\ \iff & n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,306)} \simeq 3,88 \end{aligned}$$
Il faut donc capturer au moins 4 coyote.

Exercice 2 (7 points) **Thèmes : fonctions numériques et suites**

Question 1 : b.
Pour $x \leqslant -1$, on a $f'(x) \geqslant 0$ donc f est croissante, et inversement ensuite pour $x \geqslant 1$.
Ainsi, f a un maximum local en $x = -\dfrac{1}{2}$.

Question 2 : a.
La dérivée f' est croissante sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{3}{2}\right[$, donc f'' est positive sur cet intervalle, et f y est convexe.

Question 3 : c.
f' admet un maximum en $x = -\dfrac{3}{2}$, donc sa dérivée f'' s'y annule.

Question 4 : b.
(u_n) croissante signifie que
$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \dots \leqslant u_n \leqslant \dots$$
et on a donc, pour tout entier n,
$$u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n$$
ce qui montre que (v_n) est minorée par u_0.

Question 5 : b.
Les inégalités données montrent que (u_n) est croissante et aussi aue (u_n) est majorée, par 1 par exemple, car
$$u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1$$
Ainsi (u_n) est convergente (théorème de convergence monotone)

Question 6 : b.
On a
$$n < u_n < n + 1$$

donc, au rang suivant

$$n+1 < u_{n+1} < n+2$$

et donc, en particulier

$$u_n < n+1 < u_{n+1}$$

qui montre que la suite est croissante.

Exercice 3 (7 points) **Thème : géométrie dans l'espace**

1. E(0 ; 0 ; 1) ; F(1 ; 0 ; 1) ; G(1 ; 1 ; 1) ; K(1 ; 0,5 ; 0)
2. On a $\overrightarrow{EG}(1;1;0)$ et $\overrightarrow{EK}(1;0,5;-1)$ qui sont non colinéaires, et tels que

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{EG} = 2\times 1 + (-2)\times 1 + 1\times 0 = 0$$

et

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{EK} = 2\times 1 + (-2)\times 0,5 + 1\times(-1) = 0$$

et donc $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs colinéaires du plan (EGK) et donc $\vec{n}$ est orthogonal au plan (EGK).

3. On déduit de la question précédente qu'une équation cartésienne du plan (EGK) s'écrit sous la forme

$$2x-2y+z+d=0$$

De plus, $E\in(EGK)$, d'où $2\times 0 - 2\times 0 + 1 + d = 0 \iff d=-1$, et donc le plan (EGK) admet bien pour équation cartésienne : $2x-2y+z-1=0$.

4. La droite (d) orthogonale au plan (ECK) admet donc $\vec{n}$ pour vecteur directeur et comme elle passe de plus par F, on peut écrire la représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & = & 1 & + & 2t \\ y & = & & - & 2t \\ z & = & 1 & + & t \end{array}\right. ,\ t\in\mathbb{R}$$

5. Comme $F\in(d)$ et $(d)\perp(EGK)$, le projeté orthogonal L de F sur le plan (EGK) est l'intersection de la droite et du plan.
En particulier les coordonnées de L vérifient la représentation paramétrique précédente, pour un certain paramètre $t\in\mathbb{R}$, et aussi l'équation du plan (EGK), soit

$$\begin{array}{ll} & 2x-2y+z-1=0 \\ \iff & 2(1+2t)-2(-2t)+(1+t)-1=0 \\ \iff & t=-\dfrac{2}{9} \end{array}$$

d'où les coordonnées de L :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & = & 1 & + & 2\left(-\dfrac{2}{9}\right) & = & \dfrac{5}{9} \\ y & = & & - & 2\left(-\dfrac{2}{9}\right) & = & \dfrac{4}{9} \\ z & = & 1 & + & \left(-\dfrac{2}{9}\right) & = & \dfrac{7}{9} \end{array}\right.$$

qui sont bien les coordonnées recherchées.

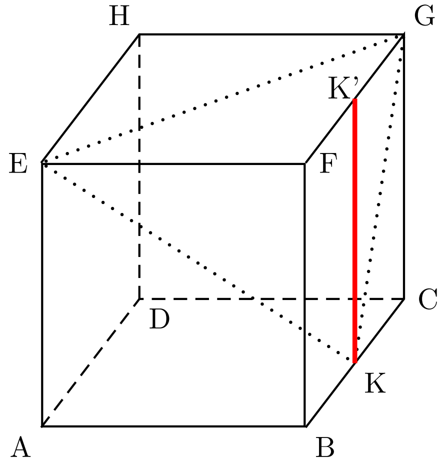
6.

$$\begin{aligned} LF &= \sqrt{\left(\frac{5}{9}-1\right)^2 + \left(\frac{4}{9}-0\right)^2 + \left(\frac{7}{9}-1\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{4^2+4^2+2^2}{9^2}} = \sqrt{\frac{36}{9^2}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

7. Le triangle EFG est isocèle rectangle et a pour aire

$$\mathcal{A}_{EFG} = \frac{1}{2}EF \times EG = \frac{1}{2}$$

Dans le tétraèdre EFGK, la hauteur associée à la base EFG est KK',



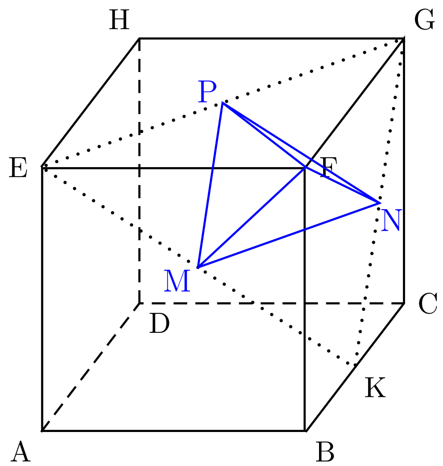
On a KK'=1 et donc le volume

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{EFGK} &= \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{AEFG} \times KK' \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

8. On eput aussi calculer ce volume en prenant la base EGK, la hauteur associée étant alors LF, et on a donc

$$\begin{aligned}& \mathcal{V}_{EFGK} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{EGK} \times LF \\ \iff\ & \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{EGK} \times \frac{2}{3} \\ \iff\ & \mathcal{A}_{EGK} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

9.



Comme les deux triangles EGK et PMN sont dans le même plan, les hauteurs qui leurs sont associées dans les deux trétraèdres sont les mêmes, soit LF.

D'arpès le théorème de Thalès, on a $PM = \frac{1}{2}GK$, $MN = \frac{1}{2}EG$ et $PN = \frac{1}{2}EK$: les longueurs de tous les côtés sont divisées par 2, et l'aire est donc divisée par 4.

Finalement, on obtient l'aire du tétraèdre :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{FPMN} &= \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{PMN} \times LF \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}\right) \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{24}\end{aligned}$$

Exercice 4 (7 points) **Thèmes : fonctions numériques, fonction exponentielle**

Partie A : études de deux fonctions

1. a) On a, pour tout $x > 0$,
$$f(x) = -0,06x^2\left(1 - \frac{13,7}{x}\right)$$
avec
$$\lim_{x\to+\infty} -0,06x^2 = -\infty$$
et
$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{13,7}{x}\right) = 1$$
d'où, par produit, la limite
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

b) On a $f'(x) = 0,06(-2x + 13,7)$ d'où le tableau de signes et de variations

x	0		6,85		$+\infty$
$-2x + 13,7$		+	0	$-$	
$f'(x)$		+	0	$-$	
f		$\nearrow$	$f(6,85)$	$\searrow$	

c) On a
$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff -x^2 + 13,7x = 0 \\ &\iff x(-x + 13,7) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 13,7 \end{aligned}$$

2. a) On a
$$\lim_{x\to+\infty} (-0,15x + 2,2) = -\infty$$
et
$$\lim_{x\to+\infty} e^{0,2x} = +\infty$$
et donc, par produit,
$$\lim_{x\to+\infty} (-0,15x + 2,2)e^{0,2x} = -\infty$$
et donc aussi,
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

b) On a $g = u\,v$ avec $u(x) = -0,15x + 2,2$ et $u'(x) = -0,15$ et $v(x) = e^{0,2x} = e^{w(x)}$ donc $v'(x) = w'(x)e^{w(x)} = 0,2e^{0,2x}$.
On obtient donc $g' = u'v + uv'$, soit pour tout $x > 0$,
$$\begin{aligned} g'(x) &= -0,15e^{0,2x} + (-0,15x + 2,2) \times 0,2e^{0,2x} \\ &= \Big(-0,15 + 0,2(-0,15x + 2,2)\Big)e^{0,2x} \\ &= (-0,03x + 0,29)\, e^{0,2x} \end{aligned}$$

c) On obtient alors le tableau de signes et de variations :

x	0		$29/3$		$+\infty$
$-0,03x + 0,29$		+	0	$-$	
$e^{0,2x}$		+		+	
$g'(x)$		+	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$g\,(29/3)$	$\searrow$	$-\infty$

On trouve comme valeur maximale
$$g\left(\frac{29}{3}\right)\simeq 2,98$$

d) on a pour tout $x\in]0;29/3]$, $g(x)>0$ et donc l'équation $g(x)=0$ n'admet aucune soltuion.
Sur $[29/3;+\infty[$, la fonction g est continue (car même dérivable), strictement décroissante avec $g\,(29/3)>0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)<0$.
Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, ou théorème de la bijection, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution sur $[29/3;+\infty[$.
Finalement, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution sur $]0;+\infty[$, c'est-à-dire une unique solution non nulle.
Avec la calculatrice, par balayage ou dichotomie par exemple, on trouve comme valeur approchée de cette solution $13,72$.

Partie B : trajectoires d'une balle de golf

1. *Première modélisation* : on rappelle qu'ici, l'unité étant la dizaine de yards, x représente la distance horizontale parcourue par la balle après la frappe et $f(x)$ la hauteur correspondante de la balle.
Selon ce modèle :
   a) On a vu que le maximum de f est $f(6,85)\simeq 2,815$ soit une hauteur maximale de 28,15 yards.
   b) On a $f'(x)=0,06(-2x+13,7)$, d'où $f'(0)=0,06\times 13,7=0,822$.
   c) $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f en 0, c'est-à-dire justement au décollage.
   On a donc $f'(0)=\tan(\theta)$ et donc, d'après le tableau donné dans l'énoncé, $\theta\simeq 39,42$ degré.
   d) La courbe est une parabole. En particulier, elle est symétrique par rapport à la droite $x=6,85$, abscisse de son sommet. Les points de décollage $x=0$ et d'atterissage $x=13,7$ sont symétriques eux aussi par rapport à cette droite, et il en est donc de même des angles que forment les tangentes à la courbes en ces deux points, c'est-à-dire que les angles de décollage et d'atterrissage de la balle sont égaux.
2. *Seconde modélisation*
   a) D'après ce modèle, la hauteur maximale est
   $$g\left(\frac{29}{3}\right)\simeq 2,98$$
   soit 29,8 yard.
   On précise que et $g'(13,7)\approx -1,87$.
   b) $g'(0)=0,29=\tan(d)$ soit, d'après le tableau foruni, $d\simeq 16,17$ degré.
   c) De même pour l'angle d'atterissage, $g'(13,17)\simeq -1,87=\tan(\alpha)$ soit $\alpha\simeq\arctan(-1,87)\simeq -61,8$ soit, arrondie à l'unité près, environ 62 degrés.

Partie C : interrogation des modèles

Les angles de décollage et d'atterissage sont très clairement différents, et le modèle parabolique de la fonction f n'est donc clairement pas adapté.
La hauteur maximale est aussi mieux approchée par le second modèle.

Parmi les deux modèles étudiés, le modèle fourni par la fonction g semble donc le plus adapté.