Baccalauréat général
Corrigé de l'épreuve d'enseignement de spécialité
– Mathématiques –

11 mai 2022

Exercice 1 (7 points) **Thème : fonction exponenteille, suites**

Partie A : Étude du premier protocole

1. a. On a $f = uv$ avec $u(t) = 3t$ donc $u'(t) = 3$ et $v(t) = e^{-0,5t+1} = e^{w(t)}$ avec $w(t) = -0,5t+1$ donc $w'(t) = -0,5$ et alors $v'(t) = w'(t)e^{w'(t)} = -0,5e^{-0,5t+1}$.

On obtient alors $f' = u'v + uv'$, soit

$$\begin{aligned} f'(t) &= 3e^{-0,5t+1} + 3t \times \left(-0,5e^{-0,5t+1}\right) \\ &= 3e^{-0,5t+1}\left(1 - 0,5t\right) \\ &= 3(-0,5t+1)e^{-0,5t+1} \end{aligned}$$

b. On a alors le signe de lé dérivée et le sens de variation :

t	0		2		10
$-0,5t+1$		$+$	0	$-$	
$e^{-0,5t+1}$		$+$	|	$+$	
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
f		↗		↘	

c. Selon cette modélisation, la quantité maximale de médicament présente dans le sang du patient sera de $f(2) = 3 \times 2e^0 = 6$ mg, au bout de 2 heures.

2. a. Sur $[0\,;2]$, la fonction f est continue (car même dérivable), strictement croissante, avec $f(0) = 0 < 5$ et $f(2) = 6 > 5$, et ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), on sait donc qu'il existe une unique solution α à l'équation $f(t) = 5$.

Avec la calculatrice, par balayage par exemple, on touve $1,02 < \alpha < 1,03$ soit, $\alpha \simeq 1,02$.

b. On peut compléter le tableau de variation :

t	0		α		2		β		10
f		↗	5	↗		↘	5	↘	

grâce auquel on trouve que la durée d'efficacité du médicament est donc de $\beta - \alpha \simeq 3,46 - 1,02 = 2,44$ soit 2,44 heures, ou encore 2 heures et 26 minutes.

Partie B : Étude du deuxième protocole

1. Selon cette modélisation, à la première heure la quantité dans le sang a diminué de 30%, il en reste donc $0,7 \times 2 = 1,4$ mg. On réinjecte de plus une nouvelle dose de 1,8 mg, et on trouve donc que

$$u_1 = 0,7 \times 2 + 1,8 = 3,2$$

2. De même que précédemment, à la (n+1)-ème heure, la quantité dans le sang présente l'heure précédente, soit u_n a diminué de 30%, soit $0,7u_n$, et on réinjecte, donc ajoute, 1,8 mg.

On obtient donc bien la relation $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.

3. **a.** Soit la proposition $\mathcal{P}_n : u_n < u_{n+1} < 6$.

Initialisation : on a $u_0 = 2$ et $u_1 = 3,2$ d'où $\mathcal{P}_1$ est vraie : $u_0 < u_1 < 6$.

Hérédité : Supposons que pour un certain entier n, $\mathcal{P}_n$ soit vraie, c'est-à-dire $u_n < u_{n+1} < 6$.
Alors, en multipliant par $0,7 > 0$, on obtient $0,7u_n < 0,7u_{n+1} < 0,7 \times 6 = 4,2$,
puis en ajoutant 1,8 on aboutit à $0,7u_n + 1,8 < 0,7u_{n+1} + 1,8 < 4,2 + 1,8$,
c'est-à-dire exactement $u_{n+1} < u_{n+1} < 6$ et qui montre donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est alors vraie.

Conclusion : on vient donc de démontrer, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier n, $\mathcal{P}_n$ est vraie, c'est-à-dire $u_n < u_{n+1} < 6$.

b. On déduit du résultat précédent que la suite (u_n) est croissante et aussi qu'elle est majorée par 6. On en déduit donc (théorème de convergence monotone) qu'elle converge vers une limite l.

c. On a $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$ et on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Ainsi, on doit nécessairement avoir (théorème du point fixe), que

$$l = 0,7l + 1,8 \iff l = \frac{1,8}{0,3} = 6$$

4. **a.** Pour tout entier n, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 6 - u_{n+1} \\ &= 6 - (0,7u_n + 1,8) \\ &= 4,2 - 0,7u_n \\ &= 0,7\,(6 - u_n) = 0,7v_n \end{aligned}$$

ce qui montre que la suite (v_n) est bien géométrique de raison $0,7$ et de premier terme $v_0 = 6 - u_0 = 4$.

b. On en déduit alors que, pour tout entier n,

$$v_n = v_0 \times q^n = 4 \times 0,7^n$$

puis, comme $v_n = 6 - u_n \iff u_n = 6 - v_n$, que

$$u_n = 6 - 4 \times 0,7^n$$

c. On arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5,5 mg, soit lorsque

$$\begin{aligned} & u_n \geqslant 5,5 \\ \iff\ & 6 - 4 \times 0,7^n \geqslant 5,5 \\ \iff\ & -4 \times 0,7^n \geqslant -0,5 \end{aligned}$$

soit, en divisant par $-4 < 0$, puis en prenant le logarithme népérien qui est strictement croissant,

$$\begin{aligned} & u_n \geqslant 5,5 \\ \iff\ & 0,7^n \leqslant \frac{-0,5}{-4} = 0,125 \\ \iff\ & \ln\left(0,7^n\right) = n\ln(0,7) \leqslant \ln(0,125) \end{aligned}$$

Enfin, en divisant par $\ln(0,7) < 0$, on obtient finalement

$$\begin{aligned} & u_n \geqslant 5,5 \\ \iff\ & n \geqslant \frac{\ln(0,125)}{\ln(0,7)} \simeq 5,8 \end{aligned}$$

Comme on réalise une injection par heure, il faut donc en réaliser 6.

Exercice 2 **(7 points)** **Thème : géométrie dans l'espace**

1. **a.** Un vecteur directeur est donné par $\vec{u}(2;-1;2)$

b. Avec les coordonnées de B, on a

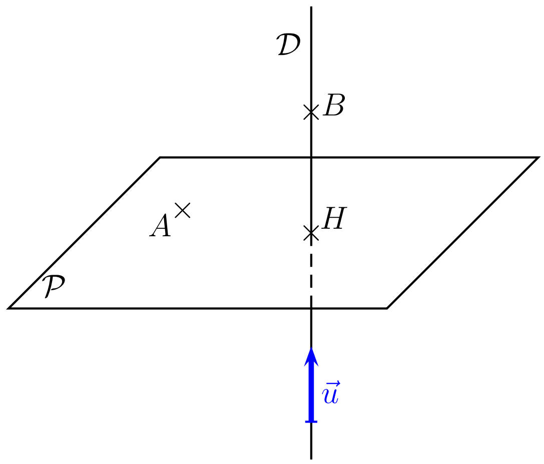
$$\left\{\begin{array}{lcl} -1 & = & 1+2t \\ 3 & = & 2-t, \\ 0 & = & 2+2t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} t & = & -1 \\ t & = & -1, \\ t & = & -1 \end{array}\right.$$

ce qui montre que B appartient bien à la droite $\mathcal{D}$.

c. On a $\overrightarrow{AB}(0;2;-3)$ donc

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u} = 0\times 2 + 2\times(-1) + (-3)\times 2 = -8$$

2.



a. Le plan $\mathcal{P}$ est orthogonale à la droite $\mathcal{D}$ dirigée par $\vec{u}$ qui est donc un vecteur normal à ce plan qui admet donc une équation cartésienne de la forme

$$2x - y + 2z + d = 0$$

On sait de plus que $A(-1;1;3)\in\mathcal{P}$, et donc que

$$2(-1) - (1) + 2(3) + d = 0 \iff d = -3$$

Finalement, on a trouvé une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P} : 2x - y + 2z - 3 = 0$$

b. Le plan $\mathcal{P}$ et la droite $\mathcal{D}$ sont orthogonaux ; en particulier ils se coupent en un unique point H. Soit $H(x;y;z)$, alors

$$H\in\mathcal{D} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+2t \\ y & = & 2-t, \quad t\in\mathbb{R} \\ z & = & 2+2t \end{array}\right.$$

et de plus,

$$\begin{array}{rl} H\in\mathcal{P} & \iff 2x - y + 2z - 3 = 0 \\ & \iff 2(1+2t) - (2-t) + 2(2+2t) - 3 = 0 \\ & \iff t = -\dfrac{1}{9} \end{array}$$

et on obtient alors les coordonnées

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+2\times\left(-1\frac{1}{9}\right) = \frac{7}{9} \\ y & = & 2-\left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{19}{9} \qquad t\in\mathbb{R} \\ z & = & 2+2\left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{16}{9} \end{array}\right.$$

qui sont bien les coordonnées recherchées du point H.

c.

$$\begin{aligned} AH &= \sqrt{\left(\frac{7}{9}-(-1)\right)^2+\left(\frac{19}{9}-1\right)^2+\left(\frac{16}{9}-3\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{16^2+10^2+11^2}{9^2}} = \frac{\sqrt{253}}{9} \end{aligned}$$

3. a. Les points H et B appartiennent tous les deux à la droite $\mathcal{D}$, et $\vec{u}$ est un vecteur directeur de cette droite.
On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{HB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$.

b. D'après le résultat précédent, en prenant le produit scalaire avec $\vec{u}$ on obtient

$$\overrightarrow{HB} = k\vec{u} \implies \overrightarrow{HB}\cdot\vec{u} = k\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

d'où

$$k = \frac{\overrightarrow{HB}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$$

Maintenant pour faire intervenir le vecteur $\overrightarrow{AB}$ on peut utiliser la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB} \implies \overrightarrow{HB}\cdot\vec{n} = \overrightarrow{HA}\cdot\vec{n} + \overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}$$

or $\overrightarrow{HA}\cdot\vec{n} = 0$ car $A \in \mathcal{P}$ et $H \in \mathcal{P}$ et $\vec{u}$ normal à $\mathcal{P}$.
On vient donc de trouver que

$$\overrightarrow{HB}\cdot\vec{n} = \overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}$$

et donc la relation souhaitée :

$$k = \frac{\overrightarrow{HB}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$$

c. D'après la question 1.c. on a $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u} = -8$, et comme $\|\vec{u}\|^2 = 2^2 + (-1)^2 + 2^2 = 9$, on obtient que

$$k = \frac{-8}{9}$$

et on retrouve les coordonnées du point H(x ;y ;z) :

$$\overrightarrow{HB} = k\vec{u} \iff \left\{\begin{array}{rcl} -1-x &=& -\frac{8}{9}\times 2 \\ 3-y &=& -\frac{8}{9}\times(-1) \\ 0-z &=& -\frac{8}{9}\times 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1+\frac{16}{9} = \frac{7}{9} \\ y &=& 3-\frac{8}{9} = \frac{19}{9} \\ z &=& \frac{16}{9} \end{array}\right.$$

4. BH est une hauteur relative à la base ACH, et donc, avec

$$V = \frac{1}{3}\times\mathcal{B}\times h$$

avec

$$\begin{aligned} h &= BH = \sqrt{\left(\frac{7}{9}-(-1)\right)^2+\left(\frac{19}{9}-3\right)^2+\left(\frac{16}{9}-0\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{16^2+8^2+16^2}{9^2}} = \frac{8}{9}\sqrt{9} = \frac{24}{9} \end{aligned}$$

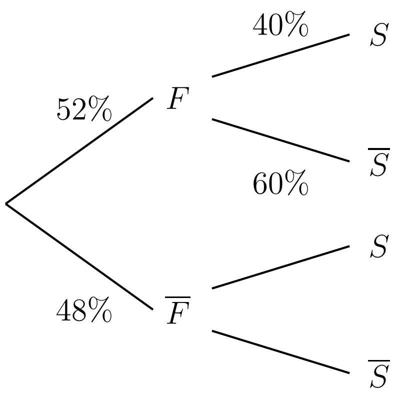
et $V = \frac{8}{9}$, d'où l'aire de la base ACH :

$$\frac{8}{9} = \frac{1}{3}\times\mathcal{B}\times\frac{24}{9} \iff \mathcal{B} = 1$$

Exercice 3 (7 points) **Thème : probabilités**

1. a. D'après l'énoncé, on a $P(S) = 25\% = 0,25$.

b.



c. On cherche la probablité $P(F \cap S) = 40 \times 52\% = 0,208$.

d. La probabilité que ce soit une femme, sachant qu'elle a suivi le stage, est la probabilité conditionnelle

$$P_S(F) = \frac{P(S \cap F)}{P(S)} = \frac{0,208}{0,25} = 0,832$$

e. D'après l'arbre, ou la formule des probabilités totales, on a

$$P(S) = 25\% = 52\% \times 40\% + 48\% \times P_{\overline{F}}(S)$$

et donc

$$P_{\overline{F}}(S) = \frac{0,25 - 0.208}{0,48} =$$

$$= \frac{P(\overline{F} \cap S)}{P(\overline{F})} = \frac{P(\overline{F} \cap S)}{48\%} = 0,0875 = 8,75\%$$

ce qui est en effet moins de 10% comme l'affirme le directeur.

2. On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 20 salariés de cette entreprise choisis au hasard associe le nombre de salariés de cet échantillon ayant suivi le stage. On suppose que l'effectif des salariés de l'entreprise est suffisamment important pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.

a. Pour former un échantillon de 20 salariés, on répète $n = 20$ fois l'expérience aléatoire "désigner au hasard un salarié" dont le succès est "le salarié a suivi le stage" de probabilité $p = P(S) = 25\% = 0,25$. Cs répétitions sont supposées identiques et indépendantes car le tirage est assimilé à un tirage avec remise.

La variable aléatoire X égale au nombre de scuccès, c'est-à-dire au nombre de salarié ayant suivi le stage dans l'échantillon suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,25$.

b. À l'aide de la calculatrice, on trouve la probabilité

$$P(X = 5) \simeq 0,202$$

c. Ce programme calcule les probabilités cumulées, c'est-à-dire

$$P(X \leqslant k) = P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots + P(X = k)$$

Lorsque l'on saisit proba(5) dans la console Python, le porgramme retourne donc la valeur

$$P(X \leqslant 5) \simeq 0,617$$

Il s'agit de la probabilité que moins de 5 personnes aient suivi le stage dans l'échantillon de 20 personnes.

d. La probabilité qu'au moins 6 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage est

$$P(X \geqslant 6) = 1 - P(X \leqslant 5) \simeq 0,383$$

3. 25% des salariés ont suivi le stage et ont donc été augmentés de 5%, les autres 75% ont été augmentés de 2%.
En moyenne, le pourventage d'augmentation est donc de

$$25\% \times 5\% + 75\% \times 2\% = 2,75\%$$

Exercice 4 (7 points) **Thème : fonctions numériques**

1. c.
On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-2x^2+3x-1}{x^2+1} \\ &= \frac{-2x^2\left(1-\frac{3}{2x}+\frac{1}{2x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} \\ &= -2\frac{1-\frac{3}{2x}+\frac{1}{2x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -2$$

et donc la droite d'équation $y = -2$ est asymptote.

2. d.
On peut par exemple dériver chacune des propositions, seule la b. et la d. convienne.
Comme on veut de plus que $F(0) = 1$, seule la réponse d. convient finalement.

3. c.
Une fonction est convexe lorsque sa dérivée est croissante (et donc dérivée seconde positive).
Ici on peut conjecturer que la fonction est convexe sur $]-\infty; 3]$ environ, et donc en particulier sur $[0; 2]$.

4. a.
Les primitives F de f vérifient $F'(x) = f(x) = 3e^{-x^2} + 2$. En particulier, comme $e^{-x^2} > 0$ sur $\mathbb{R}$, on a $F'(x) > 0$ et donc F est nécessairement strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

5. d.
On a

$$f(x) = \frac{2\ln x}{3x^2+1} = \frac{\ln(x)}{x^2} \times \frac{2}{3+\frac{1}{x^2}}$$

avec, par croissances comparées

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$$

et donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

6. c.
On pose $X = e^x$ et alors l'équation se réécrit

$$X^2 + X - 12 = 0$$

c'est une équation du second degré de discriminant $\Delta = 49 = 7^2 > 0$ qui admet donc deux solutions réelles distinctes $X_1 = -4$ et $X_2 = 3$.
On revient alors à l'équation de départ :
— $X_1 = e^{x_1} = -4$ qui est impossible, car $e^x > 0$ pour tout réel x
— $X_2 = e^{x_2} = 3 \iff x_2 = \ln(3)$
L'équation admet donc une unique solution sur $\mathbb{R}$.