Devoir maison de mathématiques

$\boxed{\text{A}}$

Exercice 1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = \dfrac{e^x+2}{e^x+1}$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   Préciser les éventuelles asymptotes à la courbe de f.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

Exercice 2 Déterminer les limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+x+x^2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x(1-x^2)+\dfrac{x}{x^2+2x+1}$ et $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x-e^x}{(x-2)^2}$

Exercice 3 On considère la suite (u_n) définie par : $u_1 = -5$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} = \left(1+\frac{2}{n}\right)u_n + \frac{18}{n} - 4\,.$$

1. Calculer u_2 et u_3.
   Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature de la suite (u_n).
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = 4n-9$.

Exercice 4 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par $f(x) = \dfrac{2+3x}{4+x}$.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

On admet que cette suite est bien définie.

1. Calculer u_1.
2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$.
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente, puis déterminer sa limite.