Corrigé du devoir maison de mathématiques

Exercice 1

a) En $-\infty$, comme $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, on a directement, par additions et quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x+2}{e^x+1} = 2$.
Ainsi, la droite $y = 2$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$.

En $+\infty$, on a une forme indéterminée, et on factorise donc préalablement :

$$f(x) = \frac{e^x+2}{e^x+1} = \frac{e^x\left(1+\frac{2}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1+\frac{2}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}$$

et alors, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}} = 1$$

Ainsi, la droite $y = 1$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

b) On calcule la dérivée : $f'(x) = \dfrac{-e^x}{(e^x+1)^2}$ et, comme $e^x > 0$, on en déduit que $f'(x) < 0$ et donc que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 Déterminer les limites :

a) $1+x+x^2 = x^2\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$ avec, $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$
et ainsi, par produit des limites $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+x+x^2 = +\infty$

b) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-x^2 = -\infty$, d'où, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(1-x^2\right) = -\infty$.
Par ailleurs, $\dfrac{x}{x^2+2x+1} = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = 1$, d'où $\dfrac{x}{x^2+2x+1} = 0$.
Finalement, par addition, on trouve $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x(1-x^2) + \dfrac{x}{x^2+2x+1} = -\infty$

c) Pour le numérateur, on a $\lim\limits_{x\to2} 2x - e^x = 4 - e^2 \simeq -3,4 < 0$.
Pour le dénominateur, $\lim\limits_{x\to2} (x-2)^2 = 0$ avec $(x-2)^2 \geqslant 0$, d'où, par quotient et règle des signes, $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{2x-e^x}{(x-2)^2} = -\infty$

Exercice 3

1. $u_2 = \left(1+\dfrac{2}{1}\right)u_1 + \dfrac{18}{1} - 4 = 3\times(-5)+14 = -1$; $u_3 = \left(1+\dfrac{2}{2}\right)u_2 + \dfrac{18}{2} - 4 = 2\times(-1)+5 = 3$
   On peut conjecturer que la suite (u_n) est arithmétique de raison 4.
2. Soit $\mathcal{P}(n)$: $u_n = 4n-9$. *Initialisation :* On a $u_1 = -5$, et pour $n = 0$, $4\times1-9 = -5$.
   Ainsi, initialement au rang $n = 1$, on a bien $u_n = 4n-9$ et $\mathcal{P}(1)$ est donc vraie.

   Hérédité : Supposons que pour un certain entier $n \geqslant 1$, on ait $\mathcal{P}(n)$: $u_n = 4n-9$, alors,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \left(1+\frac{2}{n}\right)u_n + \frac{18}{n} - 4 \\
&= \left(1+\frac{2}{n}\right)(4n-9) + \frac{18}{n} - 4 \\
&= 4n - 9 + \frac{8n}{n} - \frac{18}{n} + \frac{18}{n} - 4 \\
&= 4n - 5 \\
&= 4(n+1) - 9
\end{aligned}$$

Ainsi au rang $n+1$ on a bien encore $u_{n+1} = 4(n+1) - 9$, c'est-à-dire que $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.

Conclusion : On a donc démontré, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathcal{P}(n)$: $u_n = 4n - 9$ est vraie.

Exercice 4 $f(x) = \dfrac{2+3x}{4+x}$ *(Bac S : métropole - La Réunion 13 septembre 2019)*

1. $u_1 = f(u_0) = \dfrac{2+9}{4+3} = \dfrac{11}{7}$.
2. La fonction f est définie et dérivable sur $[0\,;\,4]$ et sur cet intervalle :
   $f'(x) = \dfrac{3(4+x) - 1(2+3x)}{(4+x)^2} = \dfrac{12+3x-2-3x}{(4+x)^2} = \dfrac{10}{(4+x)^2}$
   Quotient de nombres positifs ce nombre dérivé est positif quel que soit x dans l'intervalle $[0\,;\,4]$. La fonction f est donc croissante sur $[0\,;\,4]$.
3. Démonstration par récurrence :
   Initialisation
   On a d'après la première question : $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 3$: l'encadrement est vrai au rang 0 ;
   Hérédité
   Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$; par croissance de la fonction f sur $[0\,;\,4]$, on
   $f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(3)$ ou car $f(1) = \dfrac{5}{5} = 1$ et $f(3) = \dfrac{11}{7} \leqslant 3$,
   $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$: la relation est donc vraie au rang $n+1$.
   Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai à un rang quelconque n il est vrai au rang suivant $n+1$: d'après le principe de récurrence pour tout naturel n, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$.
4. D'après la question précédente la suite (u_n) est décroissante, minorée par 1 : elle converge donc vers une limite $\ell \geqslant 1$.
   De l'égalité $u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{2+3u_n}{4+u_n}$ on en déduit par continuité de la fonction f (puisque f est dérivable), d'après le théorème du point fixe que la limite vérifie l'équation
   $$\ell = \frac{2+3\ell}{4+\ell}.$$
   On en déduit que $\ell(4+\ell) = 2 + 3\ell \iff \ell^2 + \ell - 2 = 0$.
   Or $\Delta = 1 + 4 \times 2 = 9 = 3^2$. Il y a deux solutions : $\ell_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$ et $\ell_2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$.
   Finalement, comme $\ell \in [1\ ;\ 3]$, la seule solution est $\ell_2 = 1$, et on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.