Corrigé du devoir maison: Suites et limites

Terminale générale
Spécialité maths

A

Exercice 1

— $f(x)=\dfrac{2x+1}{3x+1}$ donc $f=\dfrac{u}{v}$ et alors, après calculs, $f'(x)=-\dfrac{1}{(3x+1)^2}$

Comme $(3x+1)^2\geqslant 0$ pour tout réel x, on trouve donc que $f'(x)<0$ et donc que f est strictement décroissante sur $]-\infty;-\frac{1}{3}[$ et sur $]-\frac{1}{3};+\infty[$.

— $f(x)=(1+2x)e^x$ de la forme $f=uv$, et alors, après calculs, $f'(x)=(3+2x)e^x$.

On trouve alors

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$3+2x$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	

Exercice 2 On a $u_n=-2n^3+3n-1=-2n^3\left(1-\dfrac{3}{2n^2}+\dfrac{1}{2n^3}\right)$

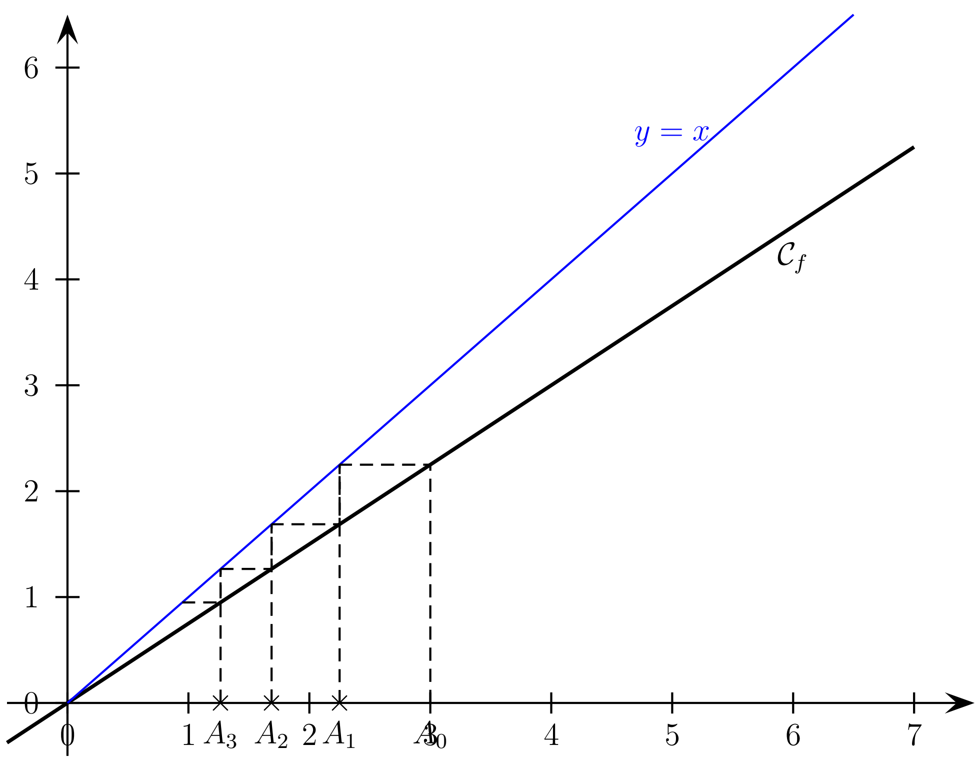
avec $\lim\limits_{n\to+\infty}-2n^3=-\infty$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}1-\dfrac{3}{2n^2}+\dfrac{1}{2n^3}=1$, d'où, par produit des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$.

$$v_n=\frac{2n^2+1}{3n^2-n}=\frac{2n^2\left(1+\dfrac{1}{2n^2}\right)}{3n^2\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)}=\frac{2}{3}\times\frac{1+\dfrac{1}{2n^2}}{1-\dfrac{1}{3n}}$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty}1+\dfrac{1}{2n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}1-\dfrac{1}{3n}=1$, et donc, par produit et quotient des limites $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\dfrac{2}{3}$.

Exercice 3

1.



2. Pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{3}{4}u_n$, ce qui montre que cette suite est géométrique de raison $q = \dfrac{3}{4}$.
Comme $-1 < q < 1$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 4

a) $u_2 = 2 - \dfrac{1}{u_1} = 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$ et $u_3 = 2 - \dfrac{1}{u_2} = 2 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$.

b) Montrons par récurrence les propriétés $P(n) : u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

Initialisation : pour $n = 1$, on a $u_1 = 2$ et $\dfrac{n+1}{n} = \dfrac{1+1}{1} = 2$, ce qui montre que $P(1)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que, pour un certain entier n non nul, $P(n)$ soit vraie, c'est-à-dire : $u_n = \dfrac{n+1}{n}$

Alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2 - \frac{1}{u_n} = 2 - \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{2(n+1)-n}{n+1} \\ &= \frac{n+2}{n+1} = \frac{(n+1)+1}{n+1} \end{aligned}$$

ce qui montre que la propriété $P(n+1)$ est alors aussi vraie.

Conclusion : on vient de montrer, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier n non nul, on a $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

Exercice 5 On a $f(x) = 1,8x(1-x)$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $u_0 = 0,3$.

a. Pour tout $x \in [0;1]$, $f'(x) = 1,8(-2x+1)$.

De plus, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0,45 \in \left[0;\dfrac{1}{2}\right]$.

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$-2x+1$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$0,45$	$\searrow$	0

b. <u>Initialisation :</u> Pour $n = 0$, $u_0 = 0,3$ et $u_1 = 1,8 \times 0,3\,(1-0,3) = 0,378$.

On a bien ainsi $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \dfrac{1}{2}$.

<u>Hérédité :</u> Supposons que pour un entier n, on ait $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Comme la fonction f est croissante sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$, on a donc $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Or, $f(0) = 0$, $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0,45 \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 0,45 \leqslant \dfrac{1}{2}$, et la propriété est encore vraie au rang $(n+1)$.

<u>Conclusion :</u> D'après le principe de récurrence, pour tout entier n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

c. La suite (u_n) est donc croissante est majorée par $\dfrac{1}{2}$. On en déduit qu'elle converge vers une limite l.

d. La limite l vérifie nécessairement, d'après le théorème du point fixe, $l = 1,8l(1-l) \iff 1,8l^2 - 0,8l = 0$ $\iff l\,(1,8l - 0,8) = 0 \iff l = 0$ ou $l = \dfrac{0,8}{1,8} = \dfrac{4}{9}$.

Or (u_n) est croissante avec $u_0 = 0,3 > 0$, et donc, pour tout entier n, $u_n \geqslant 0,3$.

La limite de la suite ne peut donc être que $l = \dfrac{4}{9}$.