Corrigé du devoir maison: Suites et limites

Terminale générale
Spécialité maths

A

Exercice 1

$f'(x) = 15x^4 - 2 - \dfrac{6}{x^2}$ et $g'(x) = \dfrac{20x}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Exercice 2

— $f(x) = \dfrac{x+1}{x+3}$ donc $f = \dfrac{u}{v}$ et alors, après calculs, $f'(x) = \dfrac{2}{(x+3)^2}$

Comme $(2x+1)^2 \geqslant 0$ pour tout réel x, on trouve donc que f est strictement croissante sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;+\infty[$.

— $f(x) = (1+x)e^x$ de la forme $f = uv$, et alors, après calculs, $f'(x) = (2+x)e^x$.

On trouve alors

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$2+x$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$-e^{-2}$	$\nearrow$	

Exercice 3 Soit $\mathcal{P}(n)$: $u_n = 2^n + 3n$.

<u>Initialisation :</u> Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et aussi $2^0 + 3 \times 0 = 1$, d'où $u_0 = 2^0 + 3 \times 0$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

<u>Hérédité :</u> supposons que pour un entier n, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n = 2^n + 3n$.

Comme par définition $u_{n+1} = 2u_n - 3n + 3$, on a donc $u_{n+1} = 2\left(2^n + 3n\right) - 3n + 3$ soit $u_{n+1} = 2^{n+1} + 3n + 3 = 2^{n+1} + 3(n+1)$, ce qui montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.

<u>Conclusion :</u> On vient donc de montrer, d'après le principe de récurrence, que la propriété $\mathcal{P}(n)$: $u_n = 2^n+3n$ est vraie pour tout entier n.

Exercice 4 $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et par la relation de récurrence, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 1$. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 3$.

a) On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 \\ &= \frac{2}{3}u_n + 1 - 3 = \frac{2}{3}u_n - 2 \\ &= \frac{2}{3}\left(u_n - 3\right) = \frac{2}{3}v_n \end{aligned}$$

ce qui montre que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{2}{3}$.

Son premier terme est $v_0 = u_0 - 3 = \dfrac{1}{2} - 3 = -\dfrac{5}{2}$

b) On en déduit que $v_n = v_0 q^n = -\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, puis que $u_n = v_n + 3 = -\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 3$.

Exercice 5