Correction du devoir de mathématiques

Exercice 1

$$\begin{aligned}
&(E_1) : e^{-2x+1} = 3 \\
&\iff -2x+1 = \ln(3) \\
&\iff x = \frac{\ln(3)-1}{-2} = \frac{1-\ln(3)}{2}
\end{aligned}$$

Pour la deuxième équation, il faut que $x > 0$ et que $3x + 2 > 0 \iff x > -\dfrac{2}{3}$ soit donc, au final, on doit avoir $x > 0$.
Pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}
&(E_2) : \ln(x) + \ln(3x+2) = 0 \\
&\iff \ln\big(x(3+2)\big) = 0 \\
&\iff x(3x+2) = e^0 = 1 \\
&\iff 3x^2 + 2x - 1 = 0
\end{aligned}$$

Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 16 > 0$ et admet deux racines $x_1 = -1$ et $x_2 = \dfrac{1}{3}$.
La première racine n'est pas solution de l'équation (E_2) qui a donc pour unique solution $x_2 = \dfrac{1}{3}$.

$$\begin{aligned}
&(E_3) : 3^x = \pi \\
&\iff \ln(3^x) = \ln(\pi) \\
&\iff x\ln(3) = \ln(\pi) \\
&\iff x = \frac{\ln(\pi)}{\ln(3)}
\end{aligned}$$

Exercice 2 (u_n) est une suite géométrique de raison $1,2$ et de premier terme $u_0 = 2$.

a) Comme la raison cette suite est $q = 1,2 > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b) En utilisant la fonction logarithme, strictement croissante, on a

$$\begin{aligned}
u_n > 100 &\iff 2 \times 1,2^n \geq 100 \\
&\iff 1,2^n \geq 50 \\
&\iff \ln(1,2^n) \geq \ln(50) \\
&\iff n\ln(1,2) \geq \ln(50)
\end{aligned}$$

puis en divisant par $\ln(1,2) > 0$, on obtient

$$u_n > 100 \iff n \geq \frac{\ln(50)}{\ln(1,2)} \simeq 21,5$$

et donc à partir du rang $n = 22$.

Exercice 3 On a $f = e^u - v$ avec $u(x) = 0,1x$ donc $u'(x) = 0,1$, et $v(x) = 2x$ donc $v'(x) = 2$, et alors $f' = u'e^u - v'$, soit

$$f'(x) = 0,1e^{0,1x} - 2$$

On cherche maintenant le signe de cette dérivée :

$$\begin{aligned}
&f'(x) \geqslant 0 \\
&\iff 0,1e^{0,1x} - 2 \geqslant 0 \\
&\iff e^{0,1x} \geqslant \frac{2}{0,1} = 20
\end{aligned}$$

puis, comme la fonction ln est strictement croissante,

$$\begin{aligned} & f'(x) \geqslant 0 \\ \iff & 0,1x \geqslant \ln(20) \\ \iff & x \geqslant \frac{\ln(20)}{0,1} = 10\ln(20) \end{aligned}$$

et on obtient donc les variations

x	0		$10\ln(20)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$20 - 20\ln(20)$	$\nearrow$	

Exercice 4

1. On a $f = \ln(u)$ avec $u(x) = 3x^2 + 3$, donc $u'(x) = 6x$ et alors $f' = \dfrac{u'}{u}$, soit $f'(x) = \dfrac{6x}{3x^2+3}$.
   Comme pour tout réel x, on a $x^2 \geqslant 0$, donc $3x^2 \geqslant 0$, d'où $3x^2 + 3 \geqslant 3 > 0$, on a donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$6x$		$-$	0	$+$	
$3x^2+3$		$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$\ln(3)$	$\nearrow$	

2. En $-\infty$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 + 3 = +\infty$, et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
   De même, en $+\infty$, comme aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + 3 = +\infty$, on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
3. La tangente T_1 a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1) = x - 1 + \ln(6)$
4. La convexité est donnée par le signe de la dérivée seconde.
   Ici, $f' = \dfrac{u}{v}$, avec $u(x) = 6x$ donc $u'(x) = 6$, et $v(x) = 3x^2 + 3$ donc $v'(x) = 6x$, et alors $f'' = (f')' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, soit

$$f''(x) = \frac{6(3x^2+3) - 6x(6x)}{(3x^2+3)^2} = \frac{-18x^2+18}{(3x^2+3)^2}$$

   Le numérateur est un trinôme du second degré dont les racines sont $-18x^2 + 18 = 0 \iff x^2 = 1$, soit $x = 1$ ou $x = -1$, tandis que le dénominateur est strictement positif comme on l'a vu à la question 1.
   On a donc

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$-18x^2+18$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$(3x^2+3)^2$		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		concave	$\vert$	convexe	$\vert$	concave	

   On a donc obtenu que f est
   — concave sur $]-\infty; -1[$ et sur $]1; +\infty[$
   — convexe sur $]-1; 1[$.

De plus, il y a deux points d'inflexion, $A(-1; f(-1))$, soit $A(-1; \ln(6))$ et $B(1; \ln(6))$.

5. On vient de voir que, pour $x \geqslant 1$, f est concave. On en déduit que $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de ses tangentes, donc en particulier en-dessous de T_1, soit, pour tout $x \geqslant 1$,

$$f(x) \leqslant x - 1 + ln(6)$$

soit donc

$$\ln\left(3x^2+3\right) \leqslant x - 1 + \ln(6) \iff \ln\left(3x^2+3\right) - \ln(6) \leqslant x - 1$$

soit donc, finalement,

$$\ln\left(\frac{3x^2+3}{6}\right) \leqslant x - 1$$

6.