

Corrigé du devoir de mathématiques

Exercice 1 $I_1 = \int_0^2 5x^3 dx = \left[\frac{5}{4}x^4 \right]_0^2 = \frac{5}{4} \times 2^4 - 0 = 20$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(1) = \frac{1}{2} \ln(2)$$

$$I_3 = \int_{-1}^1 x^2 (x^3+3)^2 dx = \left[\frac{1}{9} (x^3+3)^3 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{9} (4^3 - 2^3) = \frac{56}{9}$$

En intégrant par parties, en posant $u = x$ et $v' = e^{2x}$, donc $u' = 1$ et $v = \frac{1}{2}e^{2x}$,

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^1 x e^{2x} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x e^{2x} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{2} e^2 - \left[\frac{1}{4} e^{2x} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} e^2 - \left(\frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{4} e^0 \right) \\ &= \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$


La valeur moyenne est

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{3-1} \int_1^3 e^{-2x+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{-2} e^{-2x+1} \right]_1^3 \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} e^{-5} + \frac{1}{2} e^{-1} \right) \\ &= \frac{1}{4} (e^{-1} - e^{-5}) \end{aligned}$$

Exercice 2 Bac S, 19 juin 2014, 5 points

Partie A

1. On a $f_1(0) = 0 + e^{-0} = 1$ et donc $A(0; 1) \in \mathcal{C}_1$.
2. Comme $x \mapsto -x$ et $x \mapsto e^x$ sont définies et dérivables sur \mathbb{R} , f_1 est aussi définie et dérivable sur \mathbb{R} , comme somme et composée de fonctions définies et dérivables sur \mathbb{R} , avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'_1(x) = 1 - e^{-x}$.
De plus, $f'_1(x) = 1 - e^{-x} > 0 \iff e^{-x} < 1 = e^0 \iff -x < 0$, car la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} , et ainsi, $f'_1(x) > 0 \iff x > 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'_1(x)$	$-$	\emptyset	$+$
f_1			

Partie B

1. a. I_n est l'aire sous la courbe \mathcal{C}_n : l'aire du domaine compris entre les droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = 1$, et entre l'axe des abscisses et la courbe \mathcal{C}_n .
- b. Il semblerait que la courbe \mathcal{C}_{n+1} soit en dessous de la courbe \mathcal{C}_n . On peut donc conjecturer que la suite (I_n) est décroissante.
Il semblerait de plus que lorsque n devient grand, la courbe \mathcal{C}_n se rapproche de la diagonale du carré de côté $[OA]$. On peut ainsi conjecturer que la suite (I_n) est convergente, de limite $\frac{1}{2}$.

2. Pour tout entier n ,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 (x + e^{-nx}) dx = \int_0^1 x dx + \int_0^1 e^{-nx} dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{n}e^{-nx} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}e^{-n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}(1 - e^{-n}) \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \frac{1}{2}$, ce qui démontre la conjecture émise au début de cette partie.

Exercice 3 Bac S - Amérique du nord, 1er juin 2016 **6 points**

Partie A

1. On a $f(2e) = 2e \ln\left(\frac{2e}{2}\right) - 2e + 2 = 2e \ln(e) - 2e + 2 = 2$, car $\ln(e) = 1$, et donc $B(2e; 2) \in \mathcal{C}_f$.

De même, $f(2) = 2 \ln\left(\frac{2}{2}\right) - 2 + 2 = 0$, car $\ln(1) = 0$, et donc $I(2; 0) \in \mathcal{C}_f$.

De plus, en I le coefficient directeur de la tangente à \mathcal{C}_f est $f'(2)$.

On a, pour tout $x \geq 2$, $f(x) = x(\ln(x) - \ln(2)) - x + 2$, soit $f = uv + w$, avec $u(x) = x$, donc $u'(x) = 1$, $v(x) = \ln(x) - \ln(2)$, donc $v'(x) = \frac{1}{x}$, et $w(x) = -x + 2$, donc $w'(x) = -1$.

On a alors, $f' = u'v + uv' + w'$, soit $f'(x) = \ln(x) - \ln(2) + x \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) - \ln(2) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

Ainsi, la tangente à \mathcal{C}_f en I a pour coefficient directeur $f'(2) = \ln(1) = 0$ et passe par I : c'est l'axe des abscisses.

2. a) Une équation de \mathcal{T} est : $y = f'(2e)(x - 2e) + f(2e)$, avec $f'(2e) = \ln(e) = 1$ et $f(2e) = 2$, d'où $\mathcal{T} : y = x - 2e + 2$.

On a alors $D(x_D; y_D)$ avec $y_D = 0 = x_D - 2e + 2 \iff x_D = 2e - 2$. Ainsi, $D(2e - 2; 0)$.

b) L'aire de ABI , triangle rectangle en I , est $\frac{AI \times AB}{2} = \frac{2 \times (2e - 2)}{2} = 2e - 2$

et l'aire du trapèze $AIDB$ est $\frac{(AB + ID) \times AI}{2} = \frac{(2e - 2 + 2e - 2 - 2) \times 2}{2} = 4e - 6$.

Ainsi le volume V de la cuve est tel que

$$5e \leq V \leq 5(4e - 6)$$

soit approximativement

$$17,18 \leq V \leq 24,37$$

3. a) On a $G = uv - w$ avec $u(x) = x^2/2$, donc $u'(x) = x$, $v(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right) = \ln(x) - \ln(2)$, donc $v'(x) = 1/x$, et $w(x) = x^2/4$, donc $w'(x) = x/2$.

On a alors, $G' = u'v + uv' - w'$, soit

$$\begin{aligned} G'(x) &= x \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} - \frac{x}{2} \\ &= x \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \\ &= g(x) \end{aligned}$$

ce qui montre que G est bien une primitive de g .

b) On en déduit qu'une primitive de f définie par $f(x) = g(x) - x + 2$ est donnée par

$$F(x) = G(x) - \frac{1}{2}x^2 + 2x$$

c) On peut alors calculer l'intégrale :

$$\begin{aligned} S &= \int_2^{2e} (2 - f(x)) dx \\ &= \left[2x - F(x) \right]_2^{2e} \\ &= \left[-G(x) + \frac{1}{2}x^2 \right]_2^{2e} \\ &= -G(2e) + \frac{1}{2}(2e)^2 - \left(-G(2) + \frac{1}{2}2^2 \right) \\ &= G(2) - G(2e) + 2e^2 - 2 \end{aligned}$$

avec $G(2) = 2 \ln(1) - 1 = -1$, et $G(2e) = 2e^2 \ln(e) - e^2 = e^2$, donc

$$S = -1 - e^2 + 2e^2 - 2 = e^2 - 3$$

et on en déduit le volume de la cuve : $V = 5S = 5(e^2 - 3) \simeq 22 \text{ m}^3$.