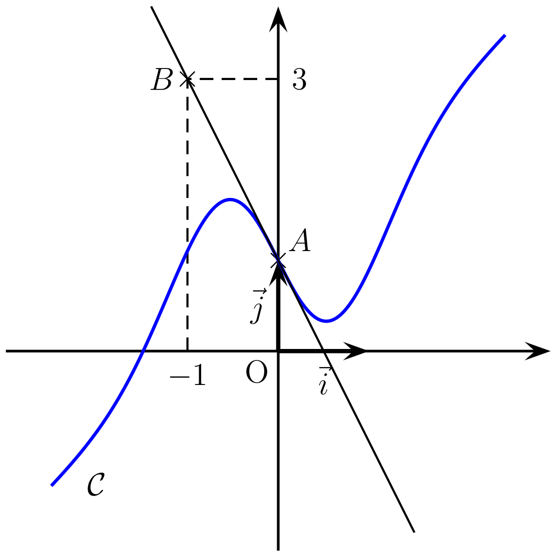
Devoir de mathématiques

Exercice 1 Calculer les intégrales : $I_1 = \displaystyle\int_0^3 3x^5\,dx$; $I_2 = \displaystyle\int_{-1}^1 xe^{3x^2}\,dx$; $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{3x}{x^2+1}\,dx$;

À l'aide d'une intégration par parties, calculer $I_4 = \displaystyle\int_0^1 xe^{-3x}\,dx$

Exercice 2 Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, une courbe $\mathcal{C}$ et la droite (AB) où A et B sont les points de coordonnées respectives $(0\ ;\ 1)$ et $(-1\ ;\ 3)$.



On désigne par f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est $\mathcal{C}$.
On suppose, de plus, qu'il existe un réel a tel que pour tout réel x,

$$f(x) = x + 1 + axe^{-x^2}.$$

1. a) Justifier que la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point A.
   b) Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).
   c) Démontrer que pour tout réel x,

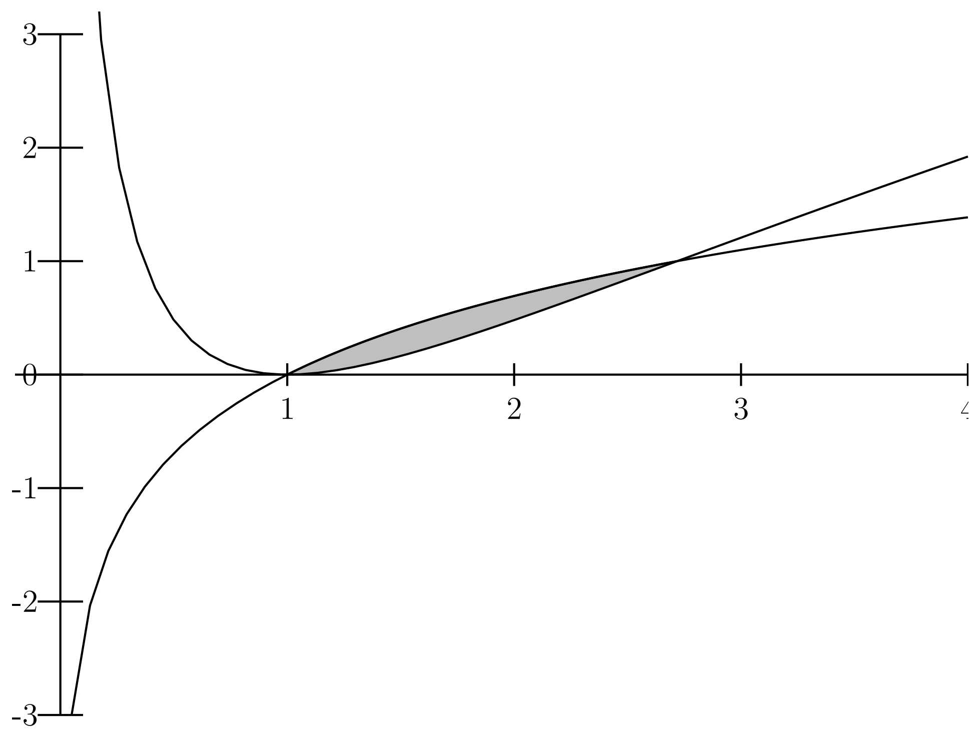
   $$f'(x) = 1 - a\left(2x^2 - 1\right)e^{-x^2}.$$

   d) On suppose que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A.
   Déterminer la valeur du réel a.
2. On désigne par c le réel négatif tel que $f(c) = 0$ et par $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine défini par :

   $$c \leqslant x \leqslant 0 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

   a) Écrire $\mathcal{A}$ sous la forme d'une intégrale.
   b) On admet que l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\frac{3}{2}}^0 f(x)\,dx$ est une valeur approchée de $\mathcal{A}$ à 10^{-3} près.
   Calculer la valeur exacte de l'intégrale I.

Exercice 3 Les courbes C et C' données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal $\left(0;\vec{i},\vec{j}\right)$, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=\ln x$ et $g(x)=(\ln x)^2$.



1. On cherche à déterminer l'aire A (en unités d'aire) de la partie grisée.
   On note $I=\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx$ et $J=\displaystyle\int_1^e (\ln x)^2\,dx$.
   a) Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $F(x)=x\ln x-x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire I.
   b) Démontrer à l'aide d'une intégration par partie que $J=e-2I$.
   c) Donner la valeur de A.
2. Pour x appartenant à l'intervalle $[1;e]$, on note M le point de la courbe C d'abscisse x et N le point de la courbe C' de même abscisse.
   Pour quelle valeur de x la distance MN est-elle maxiale ? Calculer la valeur maximale de MN.