Corrigé du devoir de mathématiques

Exercice 1 $I_1=\int_0^3 3x^5\,dx=\left[\dfrac{3}{6}x^6\right]_0^3=\dfrac{1}{2}\times 3^6-0=\dfrac{729}{2}$

$I_2=\int_{-1}^1 xe^{3x^2}\,dx=\left[\dfrac{1}{6}e^{3x^2}\right]_{-1}^1=\dfrac{1}{6}\left(e^3-e^3\right)=0$

$I_3=\int_0^1 \dfrac{3x}{x^2+1}\,dx=\left[\dfrac{3}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1=\dfrac{3}{2}\ln(2)-\dfrac{3}{2}\ln(1)=\dfrac{2}{2}\ln(2)$

En intégrant par parties, en posant $u=x$ et $v'=e^{-3x}$, donc $u'=1$ et $v=-\frac{1}{3}e^{-3x}$,

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_0^1 xe^{-3x}\,dx\\
&= \left[-\frac{1}{3}xe^{-3x}\right]_0^1-\int_0^1 -\frac{1}{3}e^{-3x}\,dx\\
&= -\frac{1}{3}e^{-3}-\left[\frac{1}{9}e^{-3x}\right]_0^1\\
&= -\frac{1}{3}e^{-3}-\left(\frac{1}{9}e^{-3}-\frac{1}{9}e^{0}\right)\\
&= -\frac{4}{9}e^{-3}+\frac{1}{9}
\end{aligned}$$

Exercice 2 **Bac S - métropole, 11 septembre 2014 - 5 points**

1. a) On a $f(0)=1$ ce qui montre que le point de coordonnées $(0;1)$, c'est-à-dire A, appartient à $\mathcal{C}$.

   b) Le coefficient directeur de la droite (AB) est $\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{3-1}{-1-0}=-2$.

   c) f est de la forme $f(x)=x+1+au(x)v(x)$, avec $u(x)=x$ donc $u'(x)=1$ et $v(x)=e^{-x^2}=e^{w(x)}$ donc $v'(x)=w'(x)e^{w(x)}=-2xe^{-x^2}$.

   Ainsi, $f'(x)=1+a\left(u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\right)=1+a\left(e^{-x^2}-2x^2e^{-x^2}\right)=1-a\left(2x^2-1\right)e^{-x^2}$.

   d) Si la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0, alors le coefficient directeur de (AB) est $f'(0)=-2$. Ainsi, $1-a\left(0-1\right)e^0=-2 \iff 1+a=-2 \iff a=-3$

2. a) Comme $f(x)\geqslant 0$ sur $[c;0]$, alors $\mathcal{A}=\displaystyle\int_c^0 f(x)dx$.

   b) La fonction $x\mapsto x+1$ a pour primitive la fonction $x\mapsto \dfrac{x^2}{2}+x$.

   La fonction $x\mapsto -2xe^{-x^2}$ (forme $u'e^u$) a pour primitive la fonction $x\mapsto e^{-x^2}$ donc la fonction $x\mapsto -3xe^{-x^2}$ a pour primitive la fonction $x\mapsto \dfrac{3}{2}e^{-x^2}$.

   La fonction f a donc pour primitive la fonction F définie par $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{3}{2}e^{-x^2}$.

   On a alors $I=F(0)-F\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3}{2}-\left(\dfrac{9}{8}-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}e^{-\frac{9}{4}}\right)=\dfrac{15}{8}-\dfrac{3}{2}e^{-\frac{9}{4}}$

Exercice 3 **Bac juin 2008**

1. a) On dérive : $F=uv-u$ avec $u(x)=x$ donc $u'(x)=1$ et $v(x)=\ln x$ donc $v'(x)=\dfrac{1}{x}$,

   et alors, $F'=u'v-uv'-u'$,

   soit $F'(x)=\ln x-x\times\dfrac{1}{x}-1=\ln x=f(x)$

   ce qui montre que F est bien une primtive de f.

   On en déduit

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^e \ln x\,dx=\Big[F(x)\Big]_1^e=F(e)-F(1)\\
&=(e\ln e-e)-(1\ln 1-1)=1
\end{aligned}$$

b) On pose $u = \ln x$ donc $u' = \dfrac{1}{x}$ et $v' = \ln x$ donc $v = x\ln x - x$ et et alors, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} J &= \Big[\ln x\,(x\ln x - x)\Big]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\,(x\ln x - x) \\ &= 0 - \int_1^e (\ln x - 1)\ dx \\ &= -\int_1^e \ln x\,dx + \int_1^e 1dx \\ &= -I + e - 1 = e - 2I \end{aligned}$$

car $I = 1$.

c) On en déduit la valeur de A :

$$\begin{aligned} A &= \int_1^e (f(x) - g(x))\ dx \\ &= \int_1^e f(x)\,dx - \int_1^e g(x)\,dx \\ &= I - J = 1 - (e - 2I) \\ &= 1 - (e - 2) = 3 - e \end{aligned}$$

2. Pour $x \in [1; e]$, on a

$$\begin{aligned} MN &= d(x) = f(x) - g(x) \\ &= \ln x - (\ln x)^2 \end{aligned}$$

Pour trouver le maximum de cette fonction, il suffit de connaître ses variations.
On a

$$d'(x) = \frac{1}{x} - 2\frac{1}{x}\ln x = \frac{1}{x}\,(1 - 2\ln x)$$

avec $1 - 2\ln x > 0 \iff \ln x < 1/2 \iff x < e^{1/2} = \sqrt{e}$ et donc

x	1		$\sqrt{e}$		e
$1/x$		$+$	$\vert$	$+$	
$1 - 2\ln x$		$+$	0	$-$	
$d'(x)$		$+$	0	$-$	
d		$\nearrow$	$d\left(\sqrt{e}\right)$	$\searrow$	

La distance est donc maximale en $x = \sqrt{e}$ et cette distance maximale est

$$d\left(\sqrt{e}\right) = \ln\sqrt{e} - \left(\ln\sqrt{e}\right)^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$