Corrigé du devoir de mathématiques

Exercice 1 $\boxed{\text{A}}$ On trouve une unique solution : $x = 2$ et $y = -3$.
$\boxed{\text{B}}$ On trouve une unique solution : $x = 3$ et $y = -2$.

Exercice 2 cf. cours.

Exercice 3

a) On a $f = e^u - v$ avec $u(x) = 2x - 1$ donc $u'(x) = 2$ et $v(x) = 2x$ donc $v'(x) = 2$.
On obtient alors $f' = u'e^u - v'$, soit $f'(x) = 2e^{2x-1} - 2$.
Maintenant,

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff 2e^{2x-1} - 2 > 0 \\ &\iff e^{2x-1} > 1 = e^0 \\ &\iff 2x - 1 > 0 \end{aligned}$$

car la fonction exponentielle est strictement croissante.
On en déduit donc que $f'(x) > 0 \iff x > \frac{1}{2}$, et donc les variations

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

b) En $-\infty$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x - 1 = -\infty$, et donc, par composition des limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x-1} = 0$, puis, par addition des limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

En $+\infty$, on a une forme indéterminée " $+\infty - \infty$".
En factorisant, on a pour $x > 0$,

$$f(x) = x\left(\frac{e^{2x-1}}{2x} - 2\right) = x\left(\frac{e^x}{x}e^{x-1} - 2\right)$$

où, d'après le théorème de croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-1} = +\infty$, et alors, par produits et addition des limites, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

c) D'après le tableau de variation précédent, on a trouvé que, pour tout réel x, $f(x)$ est positif, soit $f(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} e^{2x-1} - 2x \geqslant 0 &\iff e^{2x-1} \geqslant 2x \\ &\iff \frac{e^{2x}}{e} \geqslant 2x \end{aligned}$$

soit encore, en multipliant par $e > 0$, on obtient $e^{2x} \geqslant 2ex$.

Exercice 4 Soit $f(x) = x^2 + 2$ et C_f sa courbe représentative.

a) L'équation réduite de la tangente à C_f en A est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, soit ici, avec $f'(x) = 2x$, on obtient l'équation $y = 2a(x - a) + a^2 + 2 = 2ax - a^2 + 2$.

b) La tangente passe par l'origine si et seulement si le point $O(0; 0)$ lui appartient, soit

$$0 = 2a \times 0 - a^2 + 2 \iff a^2 = 2 \iff a = \pm\sqrt{2}$$

On trouve ainsi deux points $A_1\left(\sqrt{a}; f(\sqrt{a})\right)$, soit $A_1(\sqrt{2}; 4)$ et $A_2(-\sqrt{2}; 4)$.

Exercice 5 Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(-2;2;1)$ et $B(4;1;-3)$ et le plan P d'équation cartésienne $2x-y+3z+2=0$.

a) Pour A, $2x-y+3z+2=2\times(-2)-2+3\times 1+2=-1\neq 0$, donc $A\notin P$.
Pour B, $2x-y+3z+2=2\times 4-1+3\times(-3)+2=0$, donc $B\in P$.

b) $\overrightarrow{AB}(6;-1;-4)$ est un vecteur directeur de la droite (AB), et donc une représentation paramétrique de (AB) est

$$(AB):\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& -2 &+& 6t \\ y &=& 2 &-& t \\ z &=& 1 &-& 4t \end{array}\right. ,t\in\mathbb{R}$$

c) $\vec{n}(2;-1;3)$ est un vecteur normal au plan P. Comme Δ est aussi orthogonale à P, $\vec{n}$ est un vecteur directeur de P.
Ainsi, une représentation paramétrique de Δ est

$$\Delta:\left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& -2 &+& 2t \\ y &=& 2 &-& t \\ z &=& 1 &+& 3t \end{array}\right. ,t\in\mathbb{R}$$

d) Soit $I(x;y)$ l'intersection de la droite Δ et du plan P (qui existe bien, et est unique, car Δ et P sont orthogonaux), alors il existe un réel t tel que

$$\Delta:\left\{\begin{array}{l} \begin{array}{rcrcr} x &=& -2 &+& 2t \\ y &=& 2 &-& t \\ z &=& 1 &+& 3t \end{array} \\ 2x-y+3z+2=0 \end{array}\right.$$

La dernière équation donne alors,

$$\begin{array}{l} 2(-2+2t)-(2-t)+3(1+3t)+2=0 \\ \iff 14t-1=0 \\ \iff t=\dfrac{1}{14} \end{array}$$

On trouve alors les coordonnées de $I(x;y;z)$

$$I:\left\{\begin{array}{rclcrcr} x &=& -2 &+& 2\times\dfrac{1}{14} &=& -\dfrac{13}{7} \\ y &=& 2 &-& \dfrac{1}{14} &=& \dfrac{27}{14} \\ z &=& 1 &+& 3\times\dfrac{1}{14} &=& \dfrac{17}{14} \end{array}\right.$$