Corrigé du devoir de mathématiques

Exercice 1 Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A(-2;2)$ et $B(4;1)$, le vecteurs $\vec{u}(2;3)$, et la droite D d'équation $x+y+4=0$.

1. Une représentation paramétrique de la droite Δ de vecteur directeur $\vec{u}$ et qui passe par A.

$$\overrightarrow{AM}=t\vec{u} \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} x &=& -2 &+& 2t \\ y &=& 2 &+& 3t \end{array}\right., t\in\mathbb{R}$$

2. Une équation cartésienne de la droite de vecteur normal $\vec{u}$ s'écrit sous la forme

$$2x+3y+c=0$$

et comme elle passe par $B(4;1)$, on a aussi $2\times4+3\times1+c=0 \iff c=-11$, d'où l'équation cartésienne

$$2x+3y-11=0$$

3. On a $M(x;y)\in(AB)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires, et donc, avec $\overrightarrow{AB}(6;-1)$ et $\overrightarrow{AM}(x+2;y-2)$, d'où

$$\begin{array}{rl} M(x;y)\in(AB) & \iff 6(y-2)-(-1)(x+2)=0 \\ & \iff x+6y-10=0 \end{array}$$

4. Un vecteur normal à D est $\vec{n}(1;1)$ qui est aussi un vecteur normal de d et donc

$$\begin{array}{rl} M(x;y)\in d_1 & \iff \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}_1=0 \\ & \iff 1(x+2)+1(y-2)=0 \\ & \iff x+y=0 \end{array}$$

5. On a

$$I\in D\cap(AB) \iff \left\{\begin{array}{l} x+y+4=0 \\ x+6y-10=0 \end{array}\right.$$

En soustrayant ces deux équations on obtient $-5y+14=0$, soit $y=14/5$, puis avec la première, $x=-4-y=-34/5$.

Finalement, on a obtenu $I\left(-\dfrac{34}{5};\dfrac{14}{5}\right)$.

6. Le centre du cercle est le milieu de $[AB]$, soit $C(1;3/2)$, et le rayon du cercle est

$$R=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+(-1)^2}=\frac{\sqrt{37}}{2}$$

et donc $M(x;y)$ appartient au cercle si et seulement si

$$CM=R \iff CM^2=R^2 \iff (x-1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{37}{2}$$

qui est donc l'équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$.

Exercice 2

a) En $+\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ et donc, par addition de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

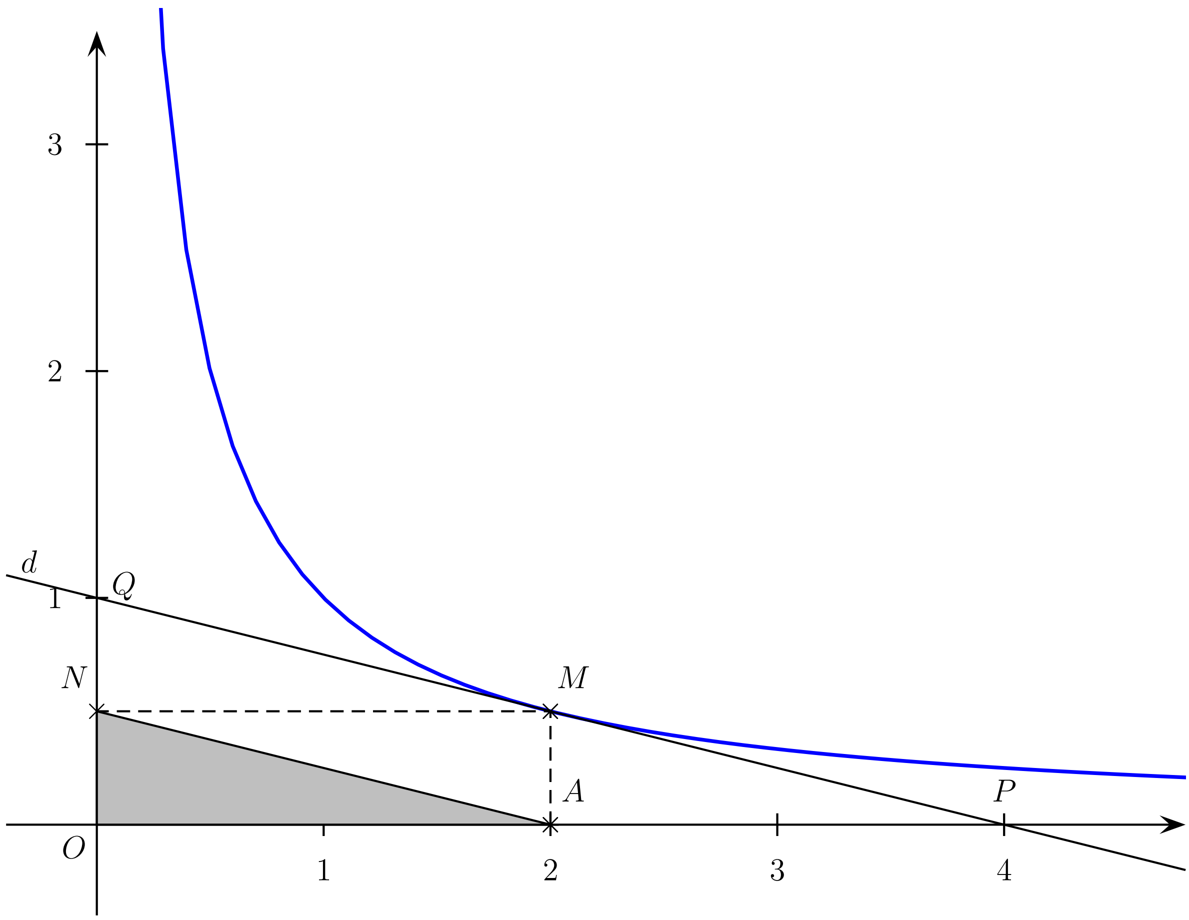
En $-\infty$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -x=+\infty$, donc par addition de limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

b) On a $f(x)=e^{-x}-x$, soit $f=e^u-x$ et donc $f'=u'e^u-1$, soit $f'(x)=-e^{-x}-1$.
Comme, pouir tout réel x, on a $e^{-x}>0$, on a donc $-e^{-x}<0$ et donc $f'(x)=-e^{-x}-1<-1<0$.
On finalement alors le tableau de variation :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Exercice 3

a)



b) La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.
Ici, avec $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$, on a donc l'équation

$$y=-\frac{1}{a^2}(x-a)+\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}x+\frac{2}{a}$$

c) L'intersection de d avec l'axe des abscisses est le point $P(x,0)$ tel que

$$y=-\frac{1}{a^2}x+\frac{2}{a}=0 \iff x=2a$$

et d coupe l'axe des ordonnées au point $Q(0,y)$ tel que

$$y=-\frac{1}{a^2}\times 0+\frac{2}{a}=\frac{2}{a}$$

On a donc les points $P(2a,0)$ et $Q\left(0,\frac{2}{a}\right)$.

d) L'aire du triangle OAN, rectangle en O, est

$$\mathcal{A}_{OAN} = \frac{OA \times ON}{2} = \frac{a \times \dfrac{1}{a}}{2} = \frac{1}{2}$$

et l'aire du triangle OPQ, rectangle en O, est

$$\mathcal{A}_{OPQ} = \frac{OP \times OQ}{2} = \frac{2a \times \dfrac{2}{a}}{2} = 2$$

et ces aires ne dépendent donc pas de a.
Enfin, on a bien

$$\mathcal{A}_{OPQ} = 4 \times \mathcal{A}_{OAN}$$