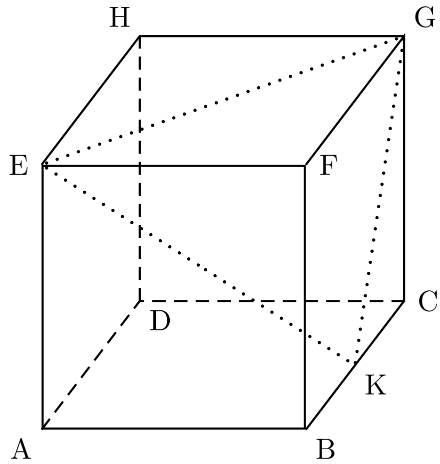
Devoir de mathématiques

Exercice 1



On considère un cube ABCDEFGH et on appelle K le milieu du segment [BC].

On se place dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$ et on considère le tétraèdre EFGK.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$$

où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

1. Préciser les coordonnées des points E, F, G et K.
2. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (EGK).
3. Démontrer que le plan (EGK) admet pour équation cartésienne : $2x - 2y + z - 1 = 0$.
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (EGK) passant par F.
5. Montrer que le projeté orthogonal L de F sur le plan (EGK) a pour coordonnées $\left(\frac{5}{9}\ ;\ \frac{4}{9}\ ;\ \frac{7}{9}\right)$.
6. Justifier que la longueur LF est égale à $\frac{2}{3}$.
7. Calculer l'aire du triangle EFG. En déduire que le volume du tétraèdre EFGK est égal à $\frac{1}{6}$.
8. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle EGK.
9. On considère les points P milieu du segment [EG], M milieu du segment [EK] et N milieu du segment[GK]. Déterminer le volume du tétraèdre FPMN.

Exercice 2

Partie I. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1. Étudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique que l'on notera α. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
3. Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie II. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Étudier les limites de f aux bornes de ses intervalles de définition : en $-\infty$, $+\infty$, -1 et 1.
   En déduire l'existence de deux asymptotes verticales dont on donnera les équations.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. On note Δ la droite d'équation $y = x + 2$. Déterminer la limite en $-\infty$ et $+\infty$ de $f(x) - (x + 2)$. Interpréter graphiquement ces limites.
4. Déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ admettant une tangente parallèle à Δ.