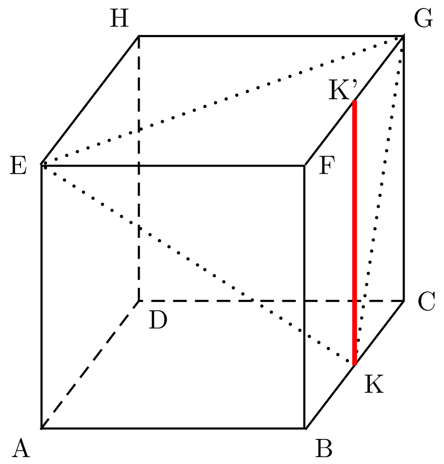
Corrigé du devoir de mathématiques

Exercice 1 *Baccalauréat général, spécialité mathématique, 12 mai 2022*

1. E(0 ; 0 ; 1) ; F(1 ; 0 ; 1) ; G(1 ; 1 ; 1) ; K(1 ; 0,5 ; 0)
2. On a $\overrightarrow{EG}(1;1;0)$ et $\overrightarrow{EK}(1;0,5;-1)$ qui sont non colinéaires, et tels que
$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{EG} = 2\times 1 + (-2)\times 1 + 1\times 0 = 0$$
et
$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{EK} = 2\times 1 + (-2)\times 0,5 + 1\times(-1) = 0$$
et donc $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EGK) et donc $\vec{n}$ est orthogonal au plan (EGK).
3. On déduit de la question précédente qu'une équation cartésienne du plan (EGK) s'écrit sous la forme
$$2x - 2y + z + d = 0$$
De plus, $E \in (EGK)$, d'où $2\times 0 - 2\times 0 + 1 + d = 0 \iff d = -1$, et donc le plan (EGK) admet bien pour équation cartésienne : $2x - 2y + z - 1 = 0$.
4. La droite (d) orthogonale au plan (EGK) admet donc $\vec{n}$ pour vecteur directeur et comme elle passe de plus par F, on peut écrire la représentation paramétrique
$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x &=& 1 &+& 2t \\ y &=& &-& 2t \\ z &=& 1 &+& t \end{array}\right. ,\ t\in\mathbb{R}$$
5. Comme $F \in (d)$ et $(d) \perp (EGK)$, le projeté orthogonal L de F sur le plan (EGK) est l'intersection de la droite et du plan.
En particulier les coordonnées de L vérifient la représentation paramétrique précédente, pour un certain paramètre $t \in \mathbb{R}$, et aussi l'équation du plan (EGK), soit
$$\begin{array}{rl} & 2x - 2y + z - 1 = 0 \\ \iff & 2(1+2t) - 2(-2t) + (1+t) - 1 = 0 \\ \iff & t = -\dfrac{2}{9} \end{array}$$
d'où les coordonnées de L :
$$\left\{\begin{array}{rcrcccl} x &=& 1 &+& 2\left(-\dfrac{2}{9}\right) &=& \dfrac{5}{9} \\ y &=& &-& 2\left(-\dfrac{2}{9}\right) &=& \dfrac{4}{9} \\ z &=& 1 &+& \left(-\dfrac{2}{9}\right) &=& \dfrac{7}{9} \end{array}\right.$$
qui sont bien les coordonnées recherchées.
6. $$\begin{aligned} LF &= \sqrt{\left(\frac{5}{9}-1\right)^2 + \left(\frac{4}{9}-0\right)^2 + \left(\frac{7}{9}-1\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{4^2+4^2+2^2}{9^2}} = \sqrt{\frac{36}{9^2}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$
7. Le triangle EFG est isocèle rectangle et a pour aire
$$\mathcal{A}_{EFG} = \frac{1}{2}EF\times EG = \frac{1}{2}$$

Dans le tétraèdre EFGK, la hauteur associée à la base EFG est KK',



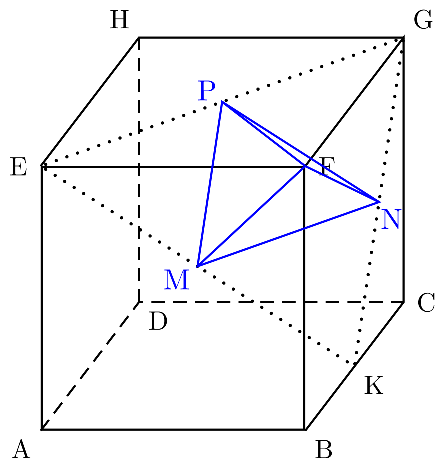
On a KK'=1 et donc le volume

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{EFGK} &= \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{AEFG} \times KK' \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

8. On peut aussi calculer ce volume en prenant la base EGK, la hauteur associée étant alors LF, et on a donc

$$\begin{aligned} & \mathcal{V}_{EFGK} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{EGK} \times LF \\ \iff & \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{EGK} \times \frac{2}{3} \\ \iff & \mathcal{A}_{EGK} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

9.



Comme les deux triangles EGK et PMN sont dans le même plan, les hauteurs qui leurs sont associées dans les deux trétraèdres sont les mêmes, soit LF.

D'arpès le théorème de Thalès, on a $PM = \frac{1}{2}GK$, $MN = \frac{1}{2}EG$ et $PN = \frac{1}{2}EK$: les longueurs de tous les côtés sont divisées par 2, et l'aire est donc divisée par 4.
Finalement, on obtient l'aire du tétraèdre :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{FPMN} &= \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{PMN} \times LF \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}\right) \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{24}\end{aligned}$$

Exercice 2

Partie I. g est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1. g est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et, pour tout x réel,
$g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	

2. g est une fonction polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$. De plus, sa limite en $+\infty$ est la limite de son terme de plus haut degré : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, et comme $g(1) = -6 < 0$, on en déduit, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que il existe un unique réel $\alpha \in]1; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$. Comme de plus, $g(x) < 0$ pour tout $x \in] - \infty; 1]$, on en déduit que $\alpha \in]1; +\infty[$ est la seule solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $g(x) = 0$.
De plus $g(2, 2) \simeq 0, 05 > 0$ et $g(2, 19) \simeq -0, 07 < 0$, donc $2, 19 < \alpha < 2, 20$.

3. On déduit de la question précédcente le signe de g :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie II. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1; 1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. *Limites en $\pm\infty$:* f est une fonction rationnelle, et on peut donc factoriser par ses termes de plus haut degré au numérateur et dénominateur (termes prépondérants en l'infini) :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} x \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}}$$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \dfrac{2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \dfrac{1}{x^2} = 1$, et donc, par quotient et produit des limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

De même, en $+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Limites en -1 : Signe de $x^2 - 1$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x^2 - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x\to-1} (x^3 + 2x^2) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-1^-} (x^2 - 1) = 0^+$, d'où, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-1} (x^3 + 2x^2) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} (x^2 - 1) = 0^-$, d'où, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to1} (x^3 + 2x^2) = 5$ et $\lim\limits_{x\to1^-} (x^2 - 1) = 0^-$, d'où, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to1} (x^3 + 2x^2) = 5$ et $\lim\limits_{x\to1^+} (x^2 - 1) = 0^+$, d'où, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$.

On en déduit que les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$ sont asymptotes verticales à $\mathcal{C}_f$.

2. f est le quotient des fonctions polynômes $u : x \mapsto x^3 + 2x^2$ et $v : x \mapsto x^2 - 1$ qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$, avec $v(x) = 0$ si et seulement si $x = -1$ ou $x = 1$, et donc, f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, avec, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$,

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{(3x^2 + 4x)(x^2 - 1) - (x^3 + 2x^2)2x}{(x^2 - 1)^2} = x\frac{x^3 - 3x - 4}{(x^2 - 1)^2} = x\frac{g(x)}{(x^2 - 1)^2}$$

On en déduit, d'après la partie I,

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
x		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$g(x)$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$(x^2-1)^2$		$+$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$, on a

$$\begin{aligned} f(x)-(x+2) &= \frac{x^3+2x^2}{x^2-1}-(x+2) \\ &= \frac{x^3+2x^2}{x^2-1}-\frac{(x+2)(x^2-1)}{x^2-1} \\ &= \frac{x^3+2x^2-\left(x^3-x+2x^2-2\right)}{x^2-1} \\ &= \frac{x+2}{x^2-1} \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}\,\dfrac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=0$

car par produit et quotient des limites $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$, et $\lim\limits_{x\to-\infty}1+\dfrac{2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}1-\dfrac{1}{x^2}=1$.

et de même, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=0$.

Graphiquement, $f(x)-(x+2)$ est la distance en la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite Δ. Cette distance tend donc vers 0 en $-\infty$ et $+\infty$, ce qui signifie que la droite Δ est une asymptote (oblique) à la courbe $\mathcal{C}_f$.

4. Le coefficient directeur de $\Delta : y=x+2$ est 1. Le coefficient de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x est $f'(x)$.

   La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x est donc parallèle à Δ si et seulement si, $f'(x)=1$, soit pour $x\neq-1$ et $x\neq1$,

$$x\frac{x^3-3x-4}{(x^2-1)^2}=1 \iff x(x^3-3x-4)=(x^2-1)^2=x^4-2x^2+1 \iff x^2+4x+1=0$$

   Ce trinôme du second degré a pour discriminant $\Delta=16-4=12=(2\sqrt{3})^2>0$, et admet donc deux racines réelles distinctes : $x_1=\dfrac{-4-2\sqrt{3}}{2}=-2-\sqrt{3}$ et $x_2=\dfrac{-4+2\sqrt{3}}{2}=-2+\sqrt{3}$

   Les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ admettant une tangente parallèle à Δ sont donc : $x_1=-2-\sqrt{3}$ et $x_2=-2+\sqrt{3}$.