Corrigé du devoir de mathématiques

Exercice 1 g est deux fois dérivable et $g = e^u$ avec $u(x) = -3x + 4$ donc $u'(x) = -3$ et donc $g' = u'e^u$, soit $g'(x) = -2 \times (-3)e^{-3x+4} = 6e^{-3x+4}$
On dérive une deuxième fois cette fonction : $g' = 6e^u$ avec la même fonction u que précédemment, et donc $g'' = (g')' = 6u'e^u$ soit $g''(x) = 6(-3)e^{-3x+4} = -18e^{-3x+4}$.
Comme $e^{-3x+4} > 0$ pour tout réel x, on trouve donc que $g''(x) < 0$ pour tout réel x, et donc que g est concave sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

1. On a $g(x) = -x^3\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^3}\right)$ avec $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^3}\right) = 1$ et donc, par produit des limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.
2. On a $g'(x) = -3x^2 + 6x = 3x(-x + 2)$ qui est un trinôme du second degré de racines 0 et 2, d'où le tableau de signes et de variations

x	$-\infty$		0		2		4
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
g	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-17

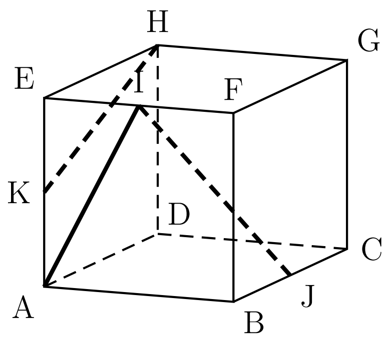
3. La tangente T_1 en 1 à pour équation $T_1 : y = g'(1)(x-1) + g(1) = 3(x-1) + 1 = 3x - 2$
4. On dérive une deuxième fois la fonction g : $g''(x) = (g')'(x) = -6x + 6$, et on a donc

x	$-\infty$		1		4
$g''(x)$		$+$	0	$+$	
g		Convexe	|	Concave	

   ainsi, g est convexe sur $]-\infty; 1]$ et concave sur $[1; +\infty[$ et admet un unique point d'inflexion en $I(1; g(1))$ soit $I(1; 1)$.
5. g est convexe sur $]-\infty; 1]$, et en particulier, C_g y est au-dessus de ses tangentes, de T_1 entre autre.
   En d'autres termes, sur $]-\infty; 1]$, on a $g(x) \geqslant 3x - 2 \iff h(x) \geqslant 0$. g est concave sur $[1; +\infty[$ donc C_g est cette fois au-dessous de ses tangentes, dont T_1 et on a donc, sur $[1; 4]$, $g(x) \leqslant 3x - 2 \iff h(x) \leqslant 0$. En résumé, on a les signes

x	$-\infty$		1		4
$h(x)$		$+$	0	$-$	

Exercice 3 *Baccalauréat général, spécialité mathématique, Amérique du Nord mai 2021 (candidats libres)*



1. On a A(0 ;0 ;0) et I(0,5 ;0 ;1), donc $\overrightarrow{AI}(0,5\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et K(0 ;0 ;0,5) et H(0 ;1 ;1) donc $\overrightarrow{KH}(0\ ;\ 1\ ;\ 0,5)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites (AI) et (KH) ne sont pas parallèles.
2. Un vecteur directeur de d_1 est $\vec{u}_1(1;-2;3)$ et un vecteur directeur de d_2 est $\vec{u}_2(1,1,2)$.
   Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles.
3. Le plan a pour vecteur normal le vecteur $\vec{p}(1\ ;\ 3\ ;\ -2)$ et d_2 a pour vecteur directeur $\vec{u_2}(1\ ;\ 1\ ;\ 2)$. Or $\vec{p}\cdot\vec{u_2} = 1+3-4=0$: les vecteurs sont orthogonaux donc la droite d_2 est parallèle au plan $\mathcal{P}$.
4. **Méthode 1.** Soit Δ la perpendiculaire à $\mathcal{P}$ contenant M. Cette droite a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{p}$, donc une équation paramétrique de Δ est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 5+1t \\ y & = & 3+3t \\ z & = & 1-2t \end{array}\right. ,t\in\mathbb{R}.$$

   Le projeté L, de M sur le plan $\mathcal{P}$ a ses coordonnées qui vérifient les quatre équations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 5+1t \\ y & = & 3+3t \\ z & = & 1-2t \\ x+3y-2z+2 & = & 0 \end{array}\right. ,t\in\mathbb{R}.$$

   et donc, en substituant les expressions des coordonnées dans la dernière équation du plan, on obtient

$$5+t+3(3+3t)-2(1-2t)+2=0 \iff t=-1$$

   En reportant dans les trois premières équations du système, on trouve alors les coordonnées de L projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 5-1 \\ y & = & 3+3\times(-1) \\ z & = & 1-2\times(-1) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 4 \\ y & = & 0 \\ z & = & 3 \end{array}\right.$$

   Donc le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathcal{P}$ est le le point L$(4;0;3)$.

   Méthode 2. On a $\overrightarrow{ML}(-1\ ;\ -3\ ;\ 2)$, donc $\overrightarrow{ML}=-\vec{p}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.
   D'autre part

$$L(4\ ;\ 0\ ;\ 3)\in\mathcal{P} \iff 4+3\times 0-2\times 3+2=6-6=0$$

   est vraie, donc L est bien le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathcal{P}$.