Devoir de mathématiques

Exercice 1 Nombre de noyaux radioactifs

On note $N(t)$ le nombre de noyaux radioactifs d'un corps à l'instant t, où t est exprimé en jours.
On admet que la fonction N est solution de l'équation différentielle $E : y' = ay$, où a est une constante réelle.

1. Déterminer la fonction $N(t)$ solution de l'équation différentielle E, sachant que $N(0) = 10^9$.
2. Au bout de 18 jours, le nombre de noyaux radioactifs a diminué de moitié.
   En déduire la valeur exacte de a.
3. Au bout de combien de jours le le nombre de noyaux radioactifs deviendra-t-il inférieur à 100 ?

Exercice 2 La température de refroidissement d'un objet fabriqué industriellement est une fonction f du temps t. Cette fonction f est définie sur l'ensemble des nombres réels positifs et vérifie l'équation différentielle :

$$y'(t) + \frac{1}{2}y(t) = 10$$

La température est exprimée en degrés Celsius (°C) et le temps t en heures.

1. Déterminer $f(t)$ pour $t \geqslant 0$, sachant que pour $t = 0$, la température de l'objet est 220 °C.
2. Pour la suite, on prendra comme fonction f, la fonction suivante définie sur $\mathbb{R}^+$ par

   $$f(t) = 200e^{-\frac{t}{2}} + 20$$

   On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

   a) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$.

   b) Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$. La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle une asymptote en $+\infty$?

   c) Représenter graphiquement $\mathcal{D}$.
3. Déterminer le moment où la température de l'objet est 50 °C.
   Donner une valeur approchée de ce moment en heures et minutes.

Exercice 3 On considère l'équation différentielle $(E) : y' + y = e^{-x}$.

1. Montrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'équation différentielle $(E') : y' + y = 0$. Résoudre l'équation différentielle (E').
3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.
5. Étudier la convexité de g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 Se ramener à une équation différentielle connue

On considère l'équation différentielle $E : y' = 2y - 3y^2$.
On cherche une solution f de cette équation telle que $f(0) = \dfrac{1}{2}$.

1. Supposons que f soit une solution de l'équation différentielle E.
   On pose alors $f = \dfrac{1}{g}$, en supposant que la fonction g ne s'annule pas, et on note E' l'équation $E' : y' = -2y + 3$.
   Montrer que f solution de E si et seulement si g solution de E'.
2. a) Préciser la valeur de $g(0)$.

   b) Déterminer la solution g de l'équation E'.

   c) En déduire la solution f de (E).