Corrigé du devoir de mathématiques

Exercice 1

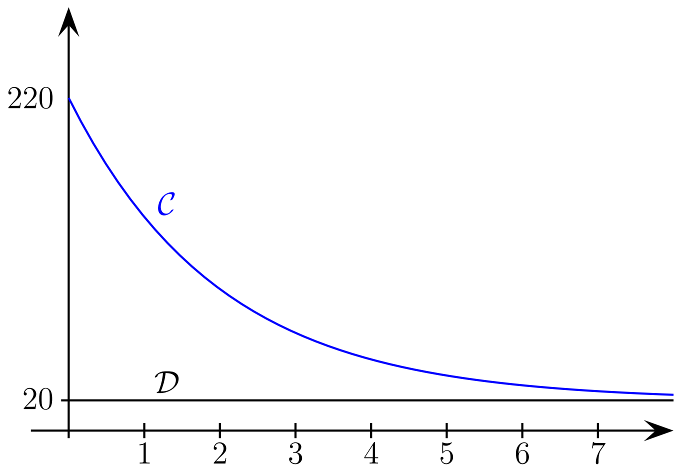
1. E est une équation sans second membre $y' = ay$ dont la solution est directement $N(t) = ke^{at}$, $k \in \mathbb{R}$.
   De plus, on a $N(0) = 10^9$ d'une part, et d'autre part, $N(0) = ke^0 = k$.
   On en déduit que $k = 10^9$, et donc que la solution de E recherchée est $N(t) = 10^9 e^{at}$.
2. Pour $t = 18$, on a
   $$N(18) = \frac{N(0)}{2} = \frac{10^9}{2} = 10^9 e^{18a}$$
   On en déduit que
   $$e^{18a} = \frac{1}{2} \iff a = -\frac{1}{18}\ln(2)$$
3. On cherche t tel que
   $$\begin{aligned} N(t) < 100 &\iff 10^9 e^{at} < 100 \\ &\iff e^{at} < \frac{100}{10^9} = 10^{-7} \end{aligned}$$
   puis, en appliquant la fonction ln qui est strictement croissante,
   $$at < \ln(10^{-7}) = -7\ln(10)$$
   et enfin, en divisant par $a < 0$, on trouve
   $$t > -\frac{7}{a}\ln(10) = 7 \times 18 \frac{\ln(10)}{\ln(2)} \simeq 418$$
   soit au cours du 418ème jour.

Exercice 2 *D'après Bac S, Antilles-Guyane, 23 juin 2009*

1. Les solutions de l'équation différentielle : sont $f(t) = ke^{-\frac{1}{2}t} + 20$, pour tout réel k.
   On sait de plus que $f(0) = 220$, soit $k + 20 = 220 \iff k = 200$.
   Ainsi, la température de l'objet est $f(t) = 200e^{-\frac{t}{2}} + 20$.
2. a) Comme $(e^u)' = u'e^u$, on a $f'(t) = 200\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\right) = -100e^{-\frac{t}{2}}$.
   Comme $e^x > 0$ pour tout réel x, on trouve donc que $f'(t) < 0$ et donc que f est strictement décroissante.

   b) On a $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{1}{2}t} = 0$ et donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 20$, et donc la droite d'équation $y = 20$ est asymptote en $+\infty$ à $\mathcal{C}$.

   c)



3. Le moment t où la température de l'objet est 50 °C est

$$\begin{aligned} & f(t) = 200e^{-\frac{t}{2}} + 20 = 50 \\ \iff \ & e^{-\frac{t}{2}} = \frac{30}{200} = \frac{3}{20} \\ \iff \ & -\frac{t}{2} = \ln\left(\frac{3}{20}\right) \\ \iff \ & t = -2\ln\left(\frac{3}{20}\right) \simeq 3,8 \end{aligned}$$

soit environ 3 heures et 48 minutes.

Exercice 3 *D'après Bac S, métropole, 22 juin 2010*

On considère l'équation différentielle $(E) : y' + y = e^{-x}$.

1. $u'(x) = e^{-x} + x\left(-e^{-x}\right) = e^{-x} - xe^{x}$ et donc

$$u'(x) + u(x) = e^{-x} - xe^{x} + xe^{-x} = e^{-x}$$

ce qui montre que u est bien solution de (E).

2. Les solutions de $(E') : y' + y = 0 \iff y' = -y$ sont les fonctions définies par $y_0(x) = ke^{-x}$, pour tout réel k.
3. Les solutions de l'équation différentielle (E) sont alors $y = y_0 + u$, soit, pour tout réel k, $y(x) = ke^{-x} + xe^{-x} = (x+k)e^{-x}$.
4. g est une solution, donc g s'écrit sous la forme $y(x) = ke^{-x} + xe^{-x} = (x+k)e^{-x}$.
De plus, $g(0) = 2 \iff k = 2$, d'où $g(x) = (x+2)e^{-x}$.
5. $$g'(x) = -g(x) + e^{-x} = -(x+2)e^{-x} + e^{-x} = -(x+1)e^{-x}$$

Pour calculer la dérivée seconde, on peut soit dériver à nouveau ce produit, soit utiliser l'équation différentielle. Comme g est solution de (E), on a

$$g'(x) = -g(x) + e^{-x}$$

et donc, en dérivant

$$g''(x) = -g'(x) - e^{-x}$$

soit,

$$g''(x) = (x+1)e^{-x} - e^{-x} = xe^{-x}$$

Comme $e^{-x} > 0$ pour tout réel x, on obtient donc que pour $x < 0$, $g''(x) < 0$ et donc g est concave, et pour $x > 0$, $g''(x) > 0$ et donc g est convexe.
Enfin la courbe de g admet un unique point d'inflexion en $x = 0$.

Exercice 4

1. Pour $f = \dfrac{1}{g}$, on a $f' = -\dfrac{g'}{g^2}$.
f solution de E signifie que $f' = 2f - 3f^2$,
soit donc $-\dfrac{g'}{g^2} = 2\dfrac{1}{g} - 3\dfrac{1}{g^2}$.
Comme g ne s'annule, g^2 non plus, et on peut multiplier cette équation par g^2, pour obtenir l'équation $-g' = 2g - 3 \iff g' = -2g + 3$ qui montre que g est solution de l'équation E'.
2. a) On a $f(0) = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{g(0)}$ et donc $g(0) = 2$.

b) L'équation E' se résout simplement : c'est une équation différentielle linéaire à coefficients constants de solution $g(x) = ke^{-2x} + \dfrac{3}{2}$.

Comme on a vu que $g(0) = 2$, on a alors $k + \dfrac{3}{2} = 2 \iff k = \dfrac{1}{2}$, d'où $g(x) = \dfrac{1}{2}e^{-2x} + \dfrac{3}{2}$.

c) On revient enfin à l'équation E par la transformation

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{g(x)} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{e^{-2x} + 3} \end{aligned}$$

qui est donc la solution recherchée de l'équation E.