Corrigé du devoir maison de mathématiques

Exercice 1 On calcule la dérivée : $f'(x) = \dfrac{-e^x}{(e^x+1)^2}$ et, comme $e^x > 0$, on en déduit que $f'(x) < 0$ et donc que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x^3 - 3x^2 - 1 \end{array} \right.$

La dérivée de f est $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$ qui est un trinôme du second degré dont les racines (évidentes une fois factorisé) sont 0 et 1, et on a donc le tableau de signes et de variations :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

En $-\infty$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = \lim\limits_{x\to-\infty} -3x^2 = -\infty$, et donc, par somme des limites, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

En $+\infty$, on a une forme indéterminée "$\infty - \infty$". On factorise donc

$$f(x) = 2x^3\left(1 - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2x^3}\right)$$

avec $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{3}{2x} - \dfrac{1}{2x^3}\right) = 1$, et donc, par produit des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 3 On considère la fonction numérique f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+1}$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On a $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 3x-1$ donc $u'(x) = 3$ et $v(x) = x+1$ donc $v'(x) = 1$, d'où $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, soit
$$f'(x) = \frac{3(x+1) - (3x-1)}{(x+1)^2} = \frac{4}{(x+1)^2}$$
Pour tout $x \geq 0$, on a $(x+1)^2 > 0$, et donc aussi $f'(x) > 0$, ce qui montre que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

2. $u_1 = f(u_0) = f(4) = \dfrac{3\times4-1}{4+1} = \dfrac{11}{5} = 2,2$
$u_2 = f(u_1) = \dfrac{3\times\frac{11}{5} - 1}{\frac{11}{5}+1} = \dfrac{28}{16} = \dfrac{7}{4} = 1,75$

3. a) On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n : 1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$.
Initialisation : pour $n = 0$, on a bien $1 \leq 1,75 \leq 2,2 \leq 4$ et P_0 est donc vraie.

Hérédité : Supposons que, pour un certain entier n, P_n soit vraie, c'est-à-dire que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$. Comme f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc sur $[1;+\infty[$, f conserve l'ordre et on a donc alors
$$f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(4)$$
or, $f(1) = 1$, $f(u_{n+1}) = u_{n+1}$, $f(u_n) = u_{n+1}$ et enfin $f(4) = \frac{11}{5}$, d'où, ces dernières inégalités se réécrivent
$$1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq \frac{11}{5} \leq 4$$
et qui montre que P_{n+1} est donc encore vraie.

Conclusion : On vient donc de démontrer, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier n, P_n est vraie, c'est-à-dire que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4$

b) Le résultat précédent montre que la suite (u_n) est décroissante car $u_{n+1} \leq u_n$, et de plus que cette suite est minorée par 1.

On en déduit donc qu'elle converge vers une limite $L \geq 1$.

c) Comme on sait que cette suite récurrente converge vers L, cette limite vérifie nécessairement la relation $L = f(L)$ (théorème du point fixe, car f est continue $[1;+\infty[$), soit, avec $L \geq 1$, donc $L+1 \neq 1$,

$$\begin{aligned}
& f(L) = \frac{3L-1}{L+1} = L \\
\iff\ & 3L-1 = L(L+1) \\
\iff\ & L^2 - 2L + 1 = 0 \\
\iff\ & (L-1)^2 = 0
\end{aligned}$$

Ainsi, on trouve la limite $L = 1$.

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1}$$

a) On a

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{v_{n+1}-1} - \frac{1}{u_n-1} \\
&= \frac{1}{f(u_n)-1} - \frac{1}{u_n-1} \\
&= \frac{1}{\dfrac{3u_n-1}{u_n+1} - 1} - \frac{1}{u_n-1} \\
&= \frac{u_n+1}{2u_n-2} - \frac{1}{u_n-1} \\
&= \frac{u_n+1}{2(u_n-1)} - \frac{1}{u_n-1} \\
&= \frac{u_n-1}{2(u_n-1)} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est arithmétique de raison $r = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{u_0-1} = \dfrac{1}{3}$

b) On en déduit que, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 + nr = \dfrac{1}{3} + \dfrac{n}{2}$.

c) On trouve donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n) = +\infty$.

d) On a

$$v_n = \frac{1}{u_n-1} \iff u_n = \frac{1}{v_n} + 1$$

et, en utilisant le résultat précédent, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{v_n} = 0$, d'où on retrouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.