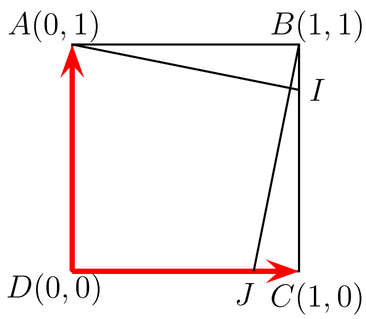
Correction du devoir maison de mathématiques

Géométrie plane vectorielle et analytique

Exercice 1 $ABCD$ est un carré, et $\overrightarrow{BI} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CJ} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{CD}$.
On calcule les coordonnées de I et J.
Soit $I\,(x_I; y_I)$, alors

$$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC} \iff \left\{\begin{array}{l} x_I - 1 = \frac{1}{5}(1-1) = 0 \\ y_I - 1 = \frac{1}{5}(0-1) = -\frac{1}{5} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x_I = 1 \\ y_I = \frac{4}{5} \end{array}\right.$$



De même, soit $J\,(x_J; y_J)$, alors

$$\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CD} \iff \left\{\begin{array}{l} x_J - 1 = \frac{1}{5}(0-1) = -\frac{1}{5} \\ y_J - 0 = \frac{1}{5}(0-0) = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x_J = \frac{4}{5} \\ y_J = 0 \end{array}\right.$$

On a alors $\overrightarrow{AI}(1; -\frac{1}{5})$ et $\overrightarrow{BJ}(-\dfrac{1}{5}; -1)$ et on peut calculer le produit scalaire

$$\overrightarrow{AI}.\cdot\overrightarrow{BJ} = 1 \times \left(-\frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{1}{5}\right) \times (-1) = 0$$

ce qui montre que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont orthogonaux.

Exercice 2 ABC est un triangle tel que $A(3; -2)$, $B(0; -1)$ et $C(1; 3)$.

a) Soit $M(x; y)$ un point quelconque de la droite parallèle à (AB) passant par C, alors

$$\begin{array}{rl} & \overrightarrow{CM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires} \\ \iff & \det\left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{AB}\right) = 0 \end{array}$$

soit, avec $\overrightarrow{CM}(x-1; y-3)$ et $\overrightarrow{AB}(-3; 1)$, on obtient l'équation de la droite :

$$\det\left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{AB}\right) = 1(x-1) - (y-3)(-3) = x + 3y - 10 = 0$$

b) La hauteur d' issue de C dans le triangle ABC est la droite qui passe par C et perpendiculaire à $[AB]$.

Soit $M(x; y)$ un point quelconque de d', alors

$$\begin{array}{rl} \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 & \iff (x-1) \times (-3) + (y-3) \times 1 = 0 \\ & \iff -3x + y = 0 \end{array}$$

qui est l'équation cartésienne de la hauteur d' (son équation réduite est alors $y = 3x$).

Exercice 3

1. Soit C le milieu de $[AB]$, alors C a pour coordonnées $C\left(\dfrac{2+1}{2}; \dfrac{-1+3}{2}\right)$, soit $C\left(\dfrac{3}{2}; 1\right)$.

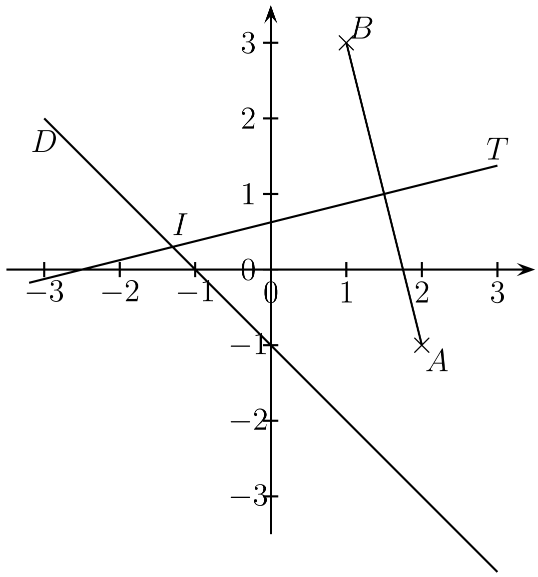
   De plus, $M(x; y) \in T \iff \overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

On a les coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{CM}\left(x-\dfrac{3}{2};y-1\right)$ et $\overrightarrow{AB}(-1;4)$, d'où,

$$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \iff \left(x-\frac{3}{2}\right)\times(-1)+(y-1)\times(4)=0 \iff -x+4y-\frac{5}{2}=0$$

La médiatrice T a donc pour équation : $-x+4y-\dfrac{5}{2}=0$.

2.



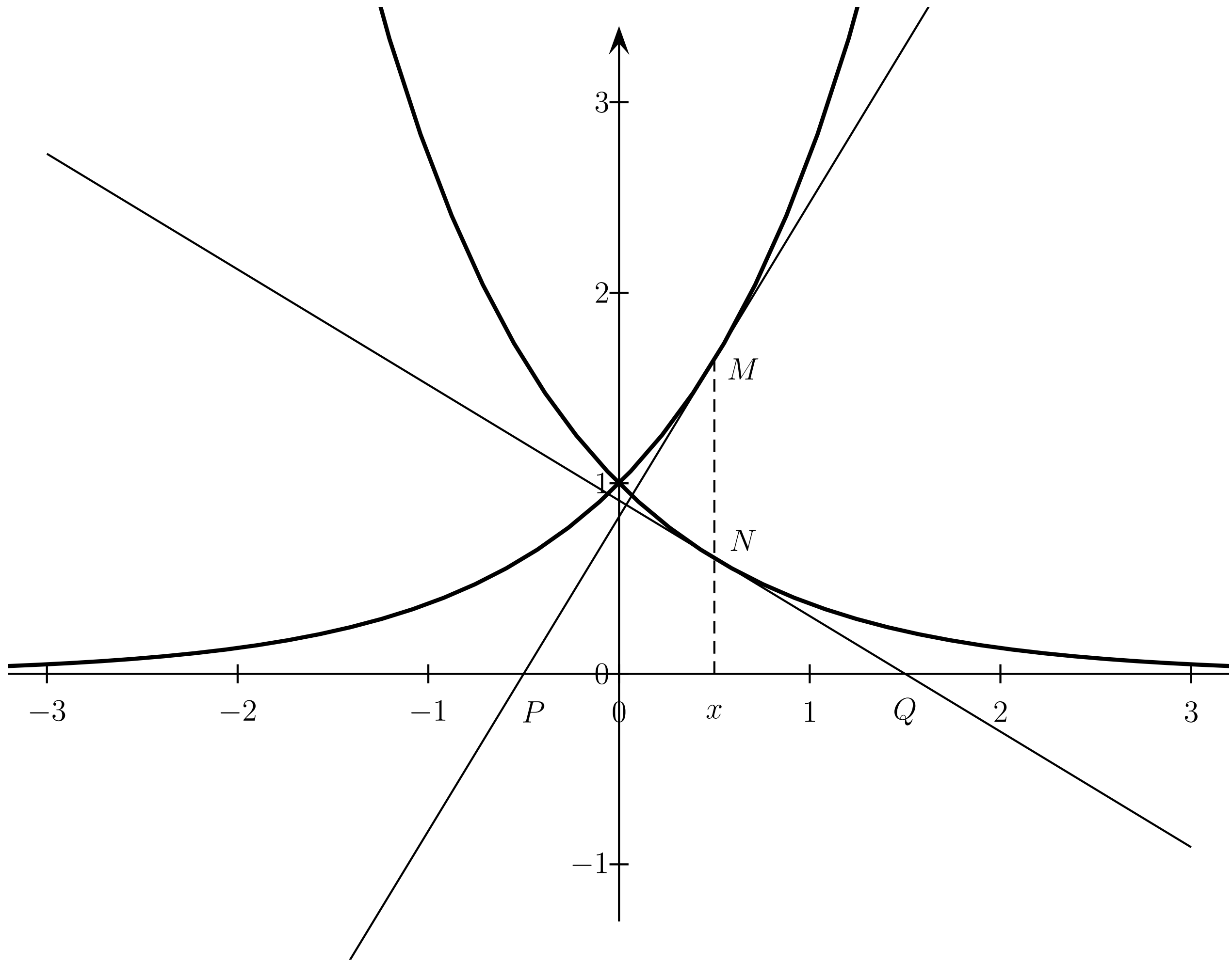
3. Soit $I(x;y)$, alors,

$$I\in D\cup T \iff \begin{cases} x+y+1=0 \\ -x+4y-\dfrac{5}{2}=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=-1 \\ -x+4y=\dfrac{5}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x=-\dfrac{13}{10} \\ y=\dfrac{3}{10} \end{cases}$$

Ainsi, les coordonnées de I sont $I\left(-\dfrac{13}{10};\dfrac{3}{10}\right)$.

Analyse

Exercice 4 *D'après Bac Antilles Guyane 2017* a)



b) La tangente en M à $\mathcal{C}_f$ a pour équation

$$\begin{aligned} y &= f'(a)(x-a)+f(a) = e^a(x-a)+e^a \\ &= e^a x + e^a(1-a) \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de cette droite est $e^a x - y + e^a(1-a) = 0$, et donc $\vec{u}\,(e^a; -1)$ est un vecteur normal à cette droite.

De même, la tangente en N à $\mathcal{C}_g$ a pour équation

$$\begin{aligned} y &= g'(a)(x-a)+g(a) = -e^{-a}(x-a)+e^{-a} \\ &= -e^{-a}x + e^{-a}(1+a) \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de cette droite est $e^{-a}x + y - e^{-a}(1+a) = 0$ et donc $\vec{v}\,(e^{-a}; 1)$ est un vecteur normal à cette droite.

On a $\vec{u}\cdot\vec{v} = e^a e^{-a} - 1 = 1 - 1 = 0$, ce qui montre que ces vecteurs sont orthogonaux, comme ces deux tangentes, qui sont donc perpendiculaires.

c) On détermine les abscisses des points P et Q, qui sont à l'intersection des deux tangentes et de l'axe des abscisses.
On a donc, pour le point Q, $y = 0 = -e^{-a}x + e^{-a}(1+a) \iff x = 1 + a$.
De même, pour le point P, $y = 0 = e^a x + e^a(1-a) \iff x = -1 + a$.
On en déduit donc que $PQ = 1 + a - (-1 + a) = 2$ et ne dépend donc pas de l'abscisse a des points M et N.