BACCALAUREAT BLANC

2023

MATHÉMATIQUES

– ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ –

Durée de l'épreuve : 4 heures

Le sujet comporte 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter 4 exercices au choix parmi les 5 exercices proposés.
Chaque exercice est noté sur 5 points *; la clarté et la précision de l'argumentation ainsi que la qualité de la rédaction seront nettement prises en compte dans la notation.*
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur sa copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse qu'il aura développée.

Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Exercice 1 QCM 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM)

Pour chaque question, trois affirmations sont proposées, une seule de ces affirmations est exacte.
Le candidat recopiera sur sa copie le numéro de chaque question et la lettre de la réponse choisie pour celle-ci.
Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse ou l'absence de réponse n'enlève aucun point.

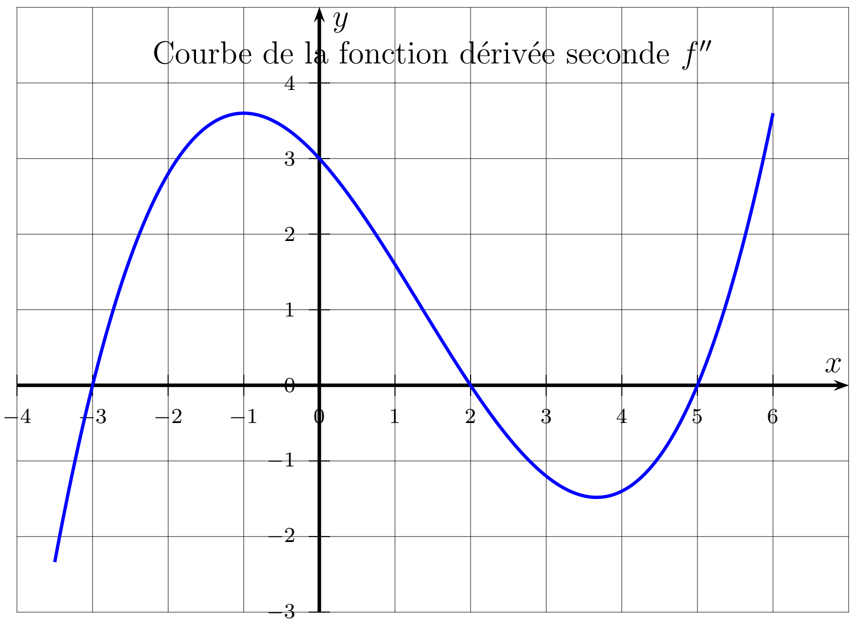
1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x^2 - 2x - 1\right) e^x.$$

A. La fonction dérivée de f est la fonction définie par $f'(x) = (2x - 2)e^x$.
B. La fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 2]$.
C. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{5 + e^x}$.
Sa courbe représentative dans un repère admet :
A. une seule asymptote horizontale ;
B. une asymptote horizontale et une asymptote verticale ;
C. deux asymptotes horizontales.

3. On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_{f''}$ représentant la fonction dérivée seconde f'' d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-3,5\ ;\ 6]$.



A. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-3\ ;\ 3]$.
B. La fonction f admet trois points d'inflexion.
C. La fonction dérivée f' de f est décroissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 17n + 20$.
A. La suite (u_n) est minorée.
B. La suite (u_n) est décroissante.
C. L'un des termes de la suite (u_n) est égal à 2021.

5. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,75u_n + 5$.
On considère la fonction « seuil » suivante écrite en Python :

```
def seuil() :
    u = 2
    n = 0
    while u < 45 :
        u = 0,75*u + 5
        n = n+1
    return n
```

Cette fonction renvoie :
A. la plus petite valeur de n telle que $u_n \geqslant 45$;
B. la plus petite valeur de n telle que $u_n < 45$;
C. la plus grande valeur de n telle que $u_n \geqslant 45$.

Exercice 2 Probabilités 5 points

Un test est mis au point pour détecter une maladie dans un pays.
Selon les autorités sanitaires de ce pays, 7 % des habitants sont infectés par cette maladie.
Parmi les individus infectés, 20 % sont déclarés négatifs.
Parmi les individus sains, 1 % sont déclarés positifs.
Une personne est choisie au hasard dans la population.
On note :

- M l'évènement : « la personne est infectée par la maladie » ;
- T l'évènement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.
2. a) Quelle est la probabilité pour que la personne soit infectée par la maladie et que son test soit positif ?
   b) Montrer que la probabilité que son test soit positif est de 0,0653.
3. On sait que le test de la personne choisie est positif.
   Quelle est la probabilité qu'elle soit infectée ?
   On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.
4. On choisit dix personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
   On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre d'individus ayant un test positif parmi les dix personnes.
   a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres.
   b) Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif.
   On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.
5. Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins une de ces personnes ait un test positif, soit supérieure à 99 %.

Exercice 3 Suites **5 points**

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable.
Elle propose alors à ses 5000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.
En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.
Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85 % de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.
On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n).
Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n-ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0 = 200$.

Partie A :

1. Calculer a_1.
2. Justifier que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3000$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,85$.
   b) Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
   c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = -2800 \times 0,85^n + 3000$.
4. Déterminer le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise.

Partie B :

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

1. a) Démontrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x + 4}{x + 2}$ est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   b) Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
   c) Construire sur le graphique précédent les quatre premiers termes de la suite (u_n).
2. a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4.$$

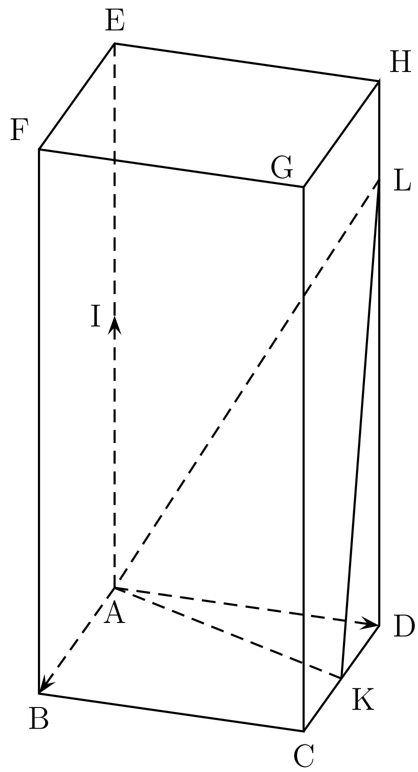
   b) Justifier que la suite (u_n) est convergente.
3. On admet que pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

   En déduire la limite de la suite (u_n) et l'interpréter dans le contexte de la modélisation.

Exercice 4 **Géométrie dans l'espace** **5 points**

On considère un pavé droit $ABCDEFGH$ tel que $AB = AD = 1$ et $AE = 2$, représenté ci- dessous. Le point I est le milieu du segment $[AE]$. Le point K est le milieu du segment $[DC]$. Le point L est défini par : $\overrightarrow{DL} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AI}$. N est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).



On se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A} ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AI}\right)$.

On admet que le point L a pour coordonnées $\left(0 ; 1 ; \dfrac{3}{2}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$.
2. a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(6 ; -3 ; 2)$ est un vecteur normal au plan (AKL).
   b) En déduire une équation cartésienne du plan (AKL).
   c) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (AKL).
   d) En déduire que le point N de coordonnées $\left(\dfrac{18}{49} ; \dfrac{40}{49} ; \dfrac{6}{49}\right)$ est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).

   On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$

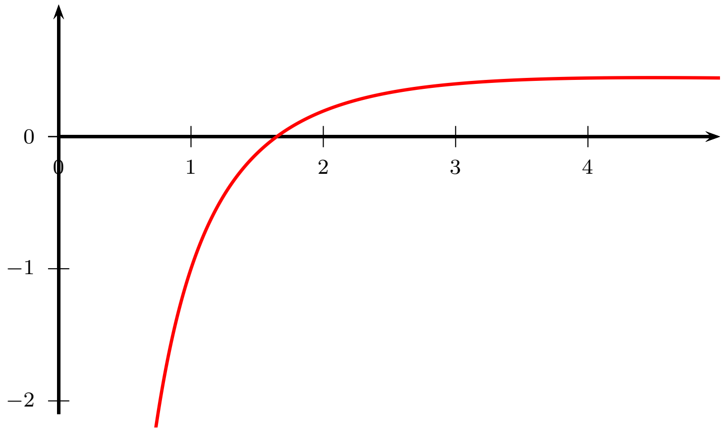
3. a) Calculer le volume du tétraèdre $ADKL$ en utilisant le triangle ADK comme base.
   b) Calculer la distance du point D au plan (AKL).
   c) Déduire des questions précédentes l'aire du triangle AKL.

Exercice 5 Fonction logarithme 5 points

Partie 1

Le graphique ci-dessous donne la représentation graphique dans un repère orthonormé de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2\ln(x) - 1}{x}.$$



1. Déterminer par le calcul l'unique solution α de l'équation $f(x) = 0$.
   On donnera la valeur exacte de α ainsi que la valeur arrondie au centième.
2. Préciser, par lecture graphique, le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie II

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = [\ln(x)]^2 - \ln(x).$$

1. a) Déterminer la limite de la fonction g en 0.
   b) Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
2. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   Démontrer que, pour tout nombre réel x de $]0\ ;\ +\infty[$, on a : $g'(x) = f(x)$, où f désigne la fonction définie dans la partie I.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   On fera figurer dans ce tableau les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$, ainsi que la valeur du minimum de g sur $]0\ ;\ +\infty[$.
4. Démontrer que, pour tout nombre réel $m > -0,25$, l'équation $g(x) = m$ admet exactement deux solutions.
5. Déterminer par le calcul les deux solutions de l'équation $g(x) = 0$.