Correction du baccalauréat blanc
MATHEMATIQUES – 2023

Exercice 1 — *Asie 8 juin 2021, ex. 1 (candidats libres)*

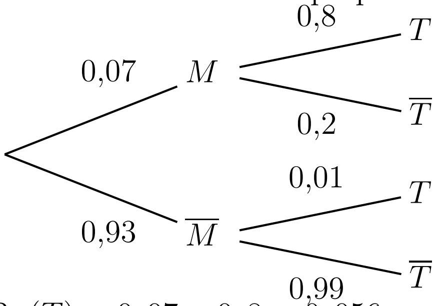
1. Réponse C.
   On a $f(x) = x^2e^x - 2xe^x - e^x$, avec $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = 0$, d'où par somme de limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
2. Réponse C.
   On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{3}{5}$ et donc la droite d'équation $y = \dfrac{3}{5}$ est asymptote horizontale au voisinage de moins l'infini ;
   De même $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et donc l'axe des abscisses est asymptote horizontale au voisinage de plus l'infini.
3. Réponse B.
   On voit sur la figure que la dérivée seconde s'annule trois fois : $f''(-3) = f''(2) = f''(5) = 0$ en, changeant de signe à chaque fois, et donc que la fonction f admet trois points d'inflexion.
4. Réponse A.
   (u_n) est une suite définie explicitement par un expression du second degré : $u_n = f(n)$ avec $f(x) = x^2 - 17x + 20$.

   On connaît facilement les variations de cette fonction qui admet un minimum en $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{17}{2}$, et qui vaut $f\left(\dfrac{17}{2}\right)$.

   On a alors que, pour tout entier n, $u_n \geqslant f\left(\dfrac{17}{2}\right)$: la suite est donc minorée.
5. Réponse A.

Exercice 2 — *Polynésie 2 juin 2021, ex. 2 (candidats libres)*

1. On construit un arbre pondéré modélisant la situation proposée :



2. a) On a $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,07 \times 0,8 = 0,056$.
   b) On a de même $P\left(\overline{M} \cap T\right) = P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,93 \times 0,01 = 0,0093$.
   et alors, d'après la formule des probabilités totales :
   $$P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0,056 + 0,0093 = 0,0653$$
3. $P_T(M) = \dfrac{P(T \cap M)}{P(T)} = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,056}{0,0653} \approx 0,86$
4. a) On répète $n = 10$ fois l'expérience aléatoire "choisir une personne au hasard dans la population", dont le succès est "la personne a un test positif".
   Ces répétitions sont supposées identiques et indépendantes (car le prélèvement est assimilé à un tirage avec remise).
   Enfin, la variable aléatoire X compte le nombre de succès, c'est-à-dire le nombre de personnes ayant un test positif.
   On en déduit que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ avec $p = 0,0653$.

b) On a alors, à l'aide de la calculatrice, $P(X=2) \simeq 0,11$ à 10^{-2} près.

5. **Méthode 1, avec le logarithme :**
On a $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - (1-0,0653)^n = 1 - 0,9347^n$
et on cherche alors que :

$$P(X \geqslant 1) > 0,99 \iff 1 - 0,9347^n > 0,99 \iff 0,01 > 0,9347^n$$

soit en prenant le logarithme népérien :

$$\ln 0,01 > n \ln 0,9347 \iff n > \frac{\ln 0,01}{\ln 0,9347} \simeq 68,2$$

Il faut donc tester au moins 69 personnes au minimum.

Méthode 2, avec la calculatrice : On cherche en tatonnant la plus petite valeur de n telle que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; 0,0653)$ et $P(X \geqslant 1) > 0,99)$.
On trouve alors $n = 69$.

Exercice 3 — *Centres étrangers 9 juin 2021 (candidats libres)*

Partie A

1. $a_1 = a_0 \times \dfrac{85}{100} + 450 = 200 \times \dfrac{85}{100} + 450 = 620$
2. Prendre les 85 % du nombre de collaborateurs en télétravail revient à multiplier par $0,85$; puis on ajoute 450 donc, pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3000$; on en déduit que $a_n = v_n + 3000$.

a) Pour tout entier n, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3000 \\ &= 0,85u_n + 450 - 3000 \\ &= 0,85\,(v_n + 3000) - 2550 \\ &= 0,85v_n + 2550 - 2550 \\ &= 0,85v_n \end{aligned}$$

ce qui montre bien que cette suite est géométrique de raison $q = 0,85$.

b) On a de plus $v_0 = u_0 - 3000 = 200 - 3000 = -2800$ et donc, pour tout n, on a $v_n = v_0 \times q^n = -2800 \times 0,85^n$.

c) Comme $u_n = v_n + 3000$, on a donc aussi, pour tout entier naturel n, $a_n = -2800 \times 0,85^n + 3000$.

4. Le nombre de mois a_n au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2500 est l'entier n tel que $a_n > 2500$, soit

$$\begin{aligned} a_n > 2500 &\iff -2800 \times 0,85^n + 3000 > 2500 \\ &\iff \frac{500}{2800} > 0,85^n \\ &\iff \ln\left(\frac{500}{2800}\right) > \ln\left(0,85^n\right) = nln(0,85) \\ &\iff n > \frac{\ln\left(\frac{5}{28}\right)}{\ln(0,85)} \simeq 10,6 \end{aligned}$$

Le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2500 est 11.

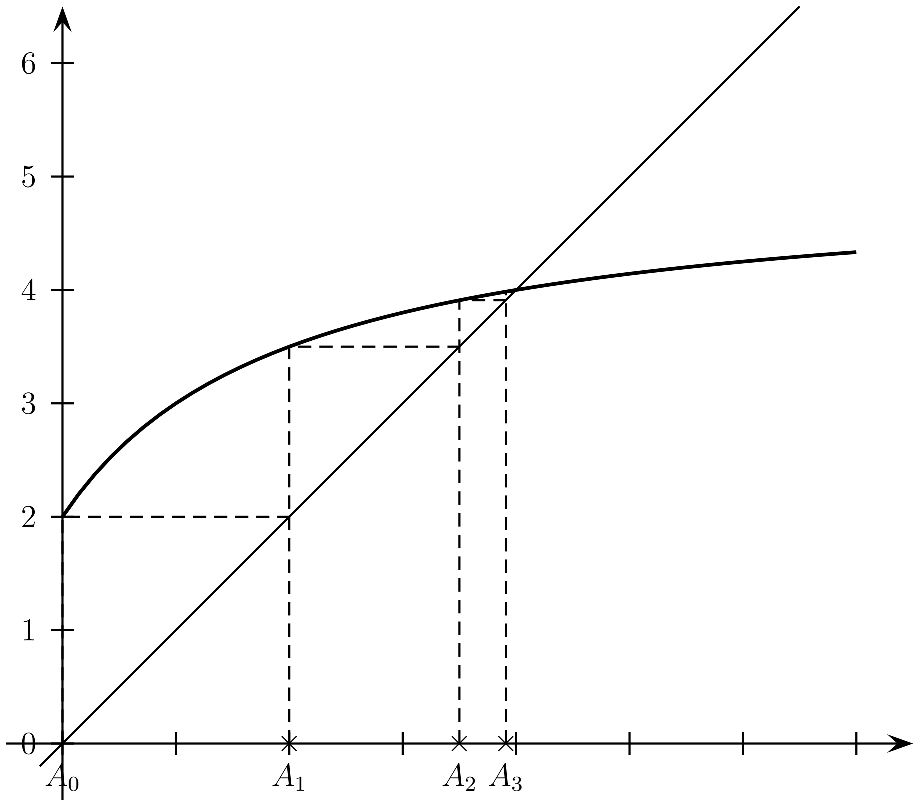
Partie B $u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 4}{u_n + 2} = f(u_n)$ avec $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$.

1. a) f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ avec, en dérivant le quotient $f = \dfrac{u}{v}$,

$$f'(x) = \frac{5 \times (x+2) - (5x+4) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{6}{(x+2)^2}$$

$f'(x) > 0$ sur $[0\ ,\ +\infty[$, donc la fonction f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

b)



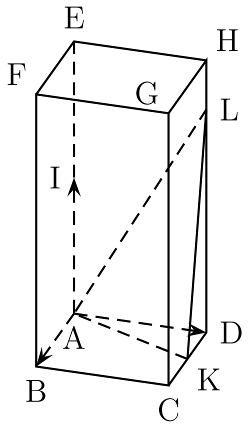
2. a) Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.
   - **Initialisation**
     $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{5 \times u_0 + 4}{u_0 + 1} = 3$, donc on a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
   - **Hérédité**
     On suppose la propriété $\mathcal{P}_n$ vraie pour un rang $n \geqslant 0$, c'est-à-dire $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.
     En appliquant la fonction f qui est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$, donc qui conserve l'ordre, on obtient alors $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(4)$.
     Or $f(0) = \dfrac{4}{2} = 2 \geqslant 0$, et $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et enfin $f(4) = \dfrac{24}{6} = 4$
     On a donc obtenu $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$, ce qui montre que la propriété est vraie au rang $n+1$.
   - **Conclusion**
     On vient donc de démontrer, d'après le principe de récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, c'est-à-dire que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

   b) D'arprès les inégalités précédentes, on a en particulier que $u_n \leqslant u_{n+1}$ ce qui signifie que la suite est croissante, et de plus que $u_n \leqslant 4$ et donc qu'elle est aussi majorée.
   On en déduit, d'après le théorème de la convergence monotone, que la suite (u_n) est convergente.

3. On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.
   On en déduit, d'après le théorème des gendarmes, que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (4 - u_n) = 0$ et donc finalement que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (u_n) = 4$.

Cela signifie que le nombre de collaborateurs satisfaits va tendre vers 4000.

Exercice 4 ——— *Asie 8 juin 2021, ex. 2 (candidats libres)*



1. Avec $C(1\ ;\ 1\ ;\ 0)$ et $D(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$, on obtient $K\left(\frac{1}{2}\ ;\ 1\ ;\ 0\right)$, donc $\overrightarrow{AK}\left(\frac{1}{2}\ ;\ 1\ ;\ 0\right)$ et par ailleurs $\overrightarrow{AL}\left(0\ ;\ 1\ ;\ \dfrac{3}{2}\right)$.
2. a) On a $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AK} = 3-3+0=0$; et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AL} = 0-3+3=0$: le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan AKL, il est donc orthogonal à ce plan ; c'est donc un vecteur normal à ce plan.

   b) Une équation cartésienne du plan est donc de la forme $6x-3y+2z+d=0$, avec $d\in\mathbb{R}$ et comme A appartient à ce plan on a aussi : $0+0+0+d=0$.
   On a donc l'équation du plan $(AKL) \iff 6x-3y+2z=0$.

   c) La droite Δ contient $D(0;1;0)$ et a pour vecteur directeur $\vec{n}(6;-3;2)$, donc :

$$\Delta : \left\{\begin{array}{rcr} x &=& 6t \\ y &=& 1-3t \\ z &=& 2t \end{array}\right. ,\ t\in\mathbb{R}$$

   d) Le point N est donc le point commun au plan (AKL) et à la droite Δ, donc ses coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{l} x=6t \\ y=1-3t \\ z=2t \\ 6x-3y+2z=0 \end{array}\right. ,\ t\in\mathbb{R}$$

   et on a donc, $6\times 6t+(-3)\times(1-3t)+2\times 2t=0$, soit $t=\dfrac{3}{49}$.
   En remplaçant maintenant dans les trois premières équations du système, on obtient les coordonnées du point N :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x &=& 6\times\dfrac{3}{49} &=& \dfrac{18}{49} \\ y &=& 1-3\times\dfrac{3}{49} &=& \dfrac{40}{49} \\ z &=& 2\times\dfrac{3}{49} &=& \dfrac{6}{49} \end{array}\right.$$

   et on trouve bien les coordonnées recherchées.

3. a) Le triangle ADK est rectangle en D et donc

$$\mathcal{A}_{ADK} = \frac{AD \times DK}{2} = \frac{1}{4}$$

Puisque $DL = \dfrac{3}{2}$, on a donc $\mathcal{V}_{ADKL} = \dfrac{\frac{1}{4} \times \frac{3}{2}}{3} = \dfrac{1}{8}$

b) Comme N est le projeté orthogonal de D sur le plan (AKL), la distance de D au plan (AKL) est justement la distance DN.

Comme on a $\overrightarrow{DN}\left(\frac{18}{49}\ ;\ \frac{40}{49} - 1\ ;\ \dfrac{6}{49}\right)$, soit $\overrightarrow{DN}\left(\frac{18}{49}\ ;\ \frac{-9}{49}\ ;\ \frac{6}{49}\right)$,

la distance est alors : $DN = \sqrt{\left(\frac{18}{49}\right)^2 + \left(\frac{-9}{49}\right)^2 + \left(\frac{6}{49}\right)^2} = \dfrac{3}{7}$.

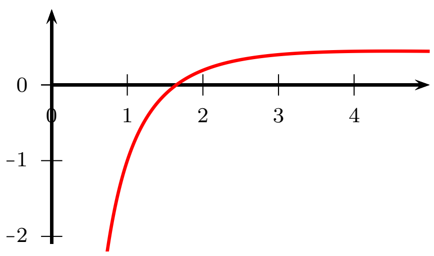
c) En prenant cette fois comme base le triangle AKL, on a le volume :

$$\mathcal{V}_{ADKL} = \frac{\mathcal{A}_{AKL} \times DN}{3} \iff \frac{1}{8} = \frac{\mathcal{A}_{AKL} \times \frac{3}{7}}{3}$$

d'où $\mathcal{A}_{AKL} = 7 \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{7}{8}$

Exercice 5 — *Métropole 13 septembre 2021 J2, ex. B (candidats libres)*

$$f(x) = \frac{2\ln(x) - 1}{x}.$$



1. Dans $]0\ ;\ +\infty[$, donc $x \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff \frac{2\ln(x) - 1}{x} = 0 \\ &\iff 2\ln(x) - 1 = 0 \\ &\iff 2\ln(x) = 1 \\ &\iff \ln(x) = \frac{1}{2} \\ &\iff x = e^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

L'unique solution est donc $x = e^{\frac{1}{2}} \simeq 1,65$.

2. Maintenant qu'on connaît la valeur pour laquelle f s'annule, on peut compléter avec le graphique :
— Sur $\left]0\ ;\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right[$, on a $f(x) < 0$;
— Sur $\left]\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\ ;\ +\infty\right[$, on a $f(x) > 0$;

Partie II $\quad g(x) = [\ln(x)]^2 - \ln(x)$

1. a) On a $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to 0} (\ln x)^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} (-\ln x) = +\infty$, donc par somme de limites : $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$.

b) On factorise tout d'abord : $g(x) = \ln(x)[\ln(x) - 1]$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) - 1 = +\infty$, on obtient par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

2. En utilisant l'expression factorisée précédente, $g(x) = \ln(x)[\ln(x) - 1]$ et en dérivant donc le produit,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{x} \times [\ln(x) - 1] + \ln(x) \times \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x}[\ln(x) - 1 + \ln(x)] \\ &= \frac{1}{x} \times (2\ln(x) - 1) \\ &= \frac{2\ln(x) - 1}{x} = f(x) \end{aligned}$$

3. Le signe de $f(x) = g'(x)$ a été donné précédemment à la question 2 de la partie I ; on a donc :
   - Sur $\left]0\ ;\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right[$, on a $f(x) = g'(x) < 0$: la fonction g est strictement décroissante sur cet intervalle
   - Sur $\left]\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\ ;\ +\infty\right[$, on a $f(x) = g'(x) > 0$: la fonction g est strictement croissante sur cet intervalle

   En résumé, on a, avec le minimum $g\left(e^{1/2}\right) = \left[\ln\left(e^{1/2}\right)\right]^2 - \ln\left(e^{1/2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

x	0		$e^{1/2}$		$+\infty$
$g'(x) = f(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Comme la fonction g est continue (car même dérivable), strictement décroissante sur $]0; e^{1/2}[$, et que $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$ et $g\left(e^{1/2}\right) = -0,25 < m$, on en déduit, d'après le théorème de la bijection (ou corollaire théorème des valeurs intermédiaires), que l'équation $g(x) = m$ admet une unique solution sur cet intervalle.

   De même, $g(x) = m$ admet une unique solution sur $[e^{-1/2}; +\infty[$ pour tout $m > -0,25$.

   En résumé, $g(x) = m$ admet excatement deux solutions sir $]0; +\infty[$ pour tout $m > -0,25$.

5. Dans $]0\ ;\ +\infty[$,

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\iff \ln(x)[\ln(x) - 1] = 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{lcl} \ln(x) &=& 0 \\ \ln(x) - 1 &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{lcl} \ln(x) &=& 0 \\ \ln(x) &=& 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} x &=& 1 \\ x &=& \mathrm{e} \end{array} \right. \end{aligned}$$

   AInsi, l'équation a les deux solutions $S = \{1\ ;\ \mathrm{e}\}$.