Devoir de révision de mathématiques

Exercice 1 ——— *Bac 2013, Amérique du Sud*

Partie A

En utilisant sa base de données, la sécurité sociale estime que la proportion de Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme est de 10%. L'étude a également permis de prouver que 30% des Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme, seront victimes d'un accident cardiaque au cours de leur vie alors que cette proportion n'atteint plus que 8% pour ceux qui ne souffrent pas de cette malformation congénitale.

On choisit au hasard une personne dans la population française et on considère les évènements :
M : « La personne présente, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme »
C : « La personne est victime d'un accident cardiaque au cours de sa vie ».

1. a Montrer que $P(M \cap C) = 0,03$.
   b Calculer $P(C)$.
2. On choisit au hasard une victime d'un accident cardiaque. Quelle est la probabilité qu'elle présente une malformation cardiaque de type anévrisme ?

Partie B

La sécurité sociale décide de lancer une enquête de santé publique, sur ce problème de malformation cardiaque de type anévrisme, sur un échantillon de 400 personnes, prises au hasard dans la population française.
On note X la variable aléatoire comptabilisant le nombre de personnes de l'échantillon présentant une malformation cardiaque de type anévrisme.

1. Définir la loi de la variable aléatoire X.
2. Déterminer $P(X = 35)$.
3. Déterminer la probabilité que 30 personnes de ce groupe, au moins, présentent une malformation cardiaque de type anévrisme.

Exercice 2 ——— *Bac 2011, Amérique du nord*

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

1. Etudier les variations de la fonction g.
2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3. En déduire que pour tout x de $[0; +\infty[$, $e^x - x > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$.
La courbe (C) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal est donnée en annexe. Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.
On admet que f est strictement croissante sur $[0; 1]$.

1. Montrer que pour tout x de $[0; 1]$, $f(x) \in [0; 1]$.
2. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.
   a) Montrer que pour tout x de $[0; 1]$, $f(x) - x = \dfrac{(1 - x)g(x)}{e^x - x}$.
   b) Etudier la position relative de la droite (D) et de la courbe (C) sur $[0; 1]$.

3. a) Déterminer une primitive de f sur $[0;1]$.
   b) Calculer l'aire, en unité d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

Partie C

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \text{pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite en laissant apparents les traits de construction.
2. Montrer que pour tout entier n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Annexe

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.