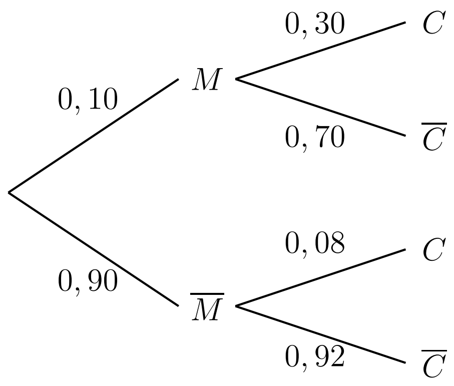
# Corrigé du devoir de révision de mathématiques

**Exercice** 1 **Partie A**
On peut construire l'arbre pondéré suivant :




1. a. $P\left(M\cap C\right)=P\left(M\right)\times P_M(C)=0,1\times 0,3=0,03$

   b. En utilisant l'arbre (ou d'après la formule des probabilités totales) :

$$\begin{aligned} P(C) &= P\left(M\cap C\right)+P\left(\overline{M}\cap C\right) \\ &= P(M)\times P_M(C)+P\left(\overline{M}\right)\times P_{\overline{M}}(C) \\ &= 0,1\times 0,3+0,9\times 0,08=0,03+0,072=0,102 \end{aligned}$$

2. On choisit au hasard une victime d'un accident cardiaque.
   La probabilité qu'elle présente une malformation cardiaque de type anévrisme est $P_C\left(M\right)$ :
   $P_C\left(M\right)=\dfrac{P\left(M\cap C\right)}{P(C)}=\dfrac{0,03}{0,102}\approx 0,2941$

**Partie B**

1. On peut considérer que, choisir au hasard un échantillon de 400 personnes, peut être assimilé à un tirage avec remise de 400 personnes dans la population totale.
   Or la probabilité qu'une personne souffre d'une malformation cardiaque de type anévrisme est $P(M)=0,1$ d'après l'énoncé.
   Donc on peut dire que la variable aléatoire $X$ qui donne le nombre de personnes souffrant de cette malformation cardiaque suit une loi binomiale de paramètres $n=400$ et $p=0,1$.
2. Comme $X$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(400\,;0,1\right)$, $P\left(X=35\right)=\begin{pmatrix}400\\35\end{pmatrix}0,1^{35}(1-0,1)^{400-35}$ ;
   le résultat donné par la calculatrice est approximativement $0,0491$.
3. La probabilité que 30 personnes de ce groupe, au moins, présentent une malformation cardiaque de type anévrisme est $P\left(X\geqslant 30\right)$ qui est égale à $1-P\left(X<30\right)=1-P\left(X\leqslant 29\right)$.
   D'après la calculatrice, $P\left(X\leqslant 29\right)\approx 0,0357$, donc $P\left(X\geqslant 30\right)\approx 0,9643$.

**Exercice** 2 **Partie A** On considère la fonction $g$ définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=e^x-x-1$.

1. $g$ est la somme de la fonction exponentielle et d'une fonction affine et est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0;+\infty[$, avec, $g'(x)=e^x-1$.
   De plus, la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, lorsque $x\in[0;1]$, on a $e^x\geqslant e^0=1$, et donc $g'(x)=e^x-1\geqslant 0$.

On a $g'(x) > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$, car Ainsi, on a le tableau de variation :

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $0$ | $+$ | |
| $g$ | $0$ | $\nearrow$ | |

2. Comme $g$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que $g(0) = 0$, on en déduit que pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) \geqslant g(0) = 0$.
3. On a donc pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) = e^x - x - 1 \geqslant 0$, et ainsi, $e^x - x \geqslant 1 > 0$.

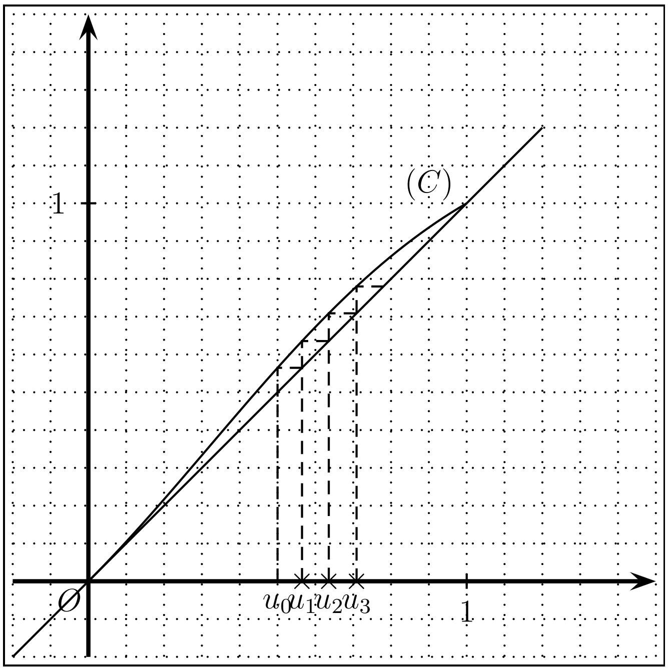
**Partie B**

1. Comme $f$ est strictement croissante sur $[0;1]$, on a $x \in [0;1] \iff 0 \leqslant x \leqslant 1 \iff f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$.
   Or $f(0) = \dfrac{e^0 - 1}{e^0 - 1} = 0$ et $f(1) = \dfrac{e^1 - 1}{e^1 - 1} = 1$, et on a donc bien ainsi $0 \leqslant f(x) \leqslant 1 \iff f(x) \in [0;1]$.
2. Soit $(D)$ la droite d'équation $y = x$.
   a) Pour tout $x$ de $[0;1]$, $f(x) - x = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} - x = \dfrac{e^x - 1 - x\left(e^x - x\right)}{e^x - x} = \dfrac{e^x - 1 - xe^x + x^2}{e^x - x}$.
   Or $(1-x)g(x) = (1-x)\left(e^x - x - 1\right) = e^x - x - 1 - xe^x + x^2 + x = e^x - 1 - xe^x + x^2$.
   On a donc ainsi bien, pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) - x = \dfrac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$.
   b) On a vue que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, donc aussi tout $x \in [0;1]$, $g(x) \geqslant 0$ et $e^x - x > 0$.
   Ainsi, $f(x) - x$ est du même signe que $1 - x$, et donc $f(x) - x$ est positif sur $[0;1]$ : la courbe $(C)$ est au dessus de la droite $(D)$ sur $[0;1]$, $(C)$ et $(D)$ se coupant en $x = 0$ (car $g(0) = 0$) et en $x = 1$.
3. a) $f$ est de la forme $\dfrac{u'}{u}$, avec $u(x) = e^x - x$.
   Comme, pour $x \in [0;1]$, $e^x - x > 0$, d'après la partie A, une primitiver de $f$ est donc $F = \ln u$, soit $F(x) = \ln\left(e^x - x\right)$.
   b) L'aire du domaine est :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^1 \Big(f(x) - x\Big)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 x\,dx = \Big[F(x)\Big]_0^1 - \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \\ &= \Big(F(1) - F(0)\Big) - \left(\frac{1}{2}1^2 - \frac{1}{2}0^2\right) = \ln(e-1) - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

**Partie C**

1.




2. Montrons par récurrence que pour tout entier $n$, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

   *Initialisation :* Pour $n = 0$, on a $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_1 = f(u_0) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) \simeq 0,56$, et donc on a bien $\dfrac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$.

   *Hérédité :* Supposons que pour un certain entier $n$, on ait $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$, alors, comme la fonction $f$ est strictement croissante sur $[0;1]$, on a donc $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(1)$, soit aussi, comme $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \simeq 0,56 \geqslant \dfrac{1}{2}$, $f(1) = 1$, et $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$,

   $\dfrac{1}{2} \leqslant f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$,

   ce qui montre que la propriété est encore vraie au rang $n+1$.

   *Conclusion :* On vient donc de démontrer d'après le principe de récurrence que pour tout entier $n$, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

3. D'après le résultat précédent, la suite $(u_n)$ est croissante et majorée par 1, elle est donc convergente vers une limite $l$.

   Comme la fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (car elle y est même dérivable), on a alors

   $$u_{n+1} = f(u_n) \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) \Longrightarrow l = f(l)$$

   La limite $l$ est donc une solution de l'équation $f(l) = l$ (c'est aussi le théorème du point fixe), et il s'agit donc de l'abscisse d'un point d'intersection de $(C)$ et $(D)$, soit $l = 0$ ou $l = 1$ d'après la question 2.b) de la partie B.

   Or, d'après la question précédente, pour tout entier $n$, $\dfrac{1}{2} \leqslant U_n \leqslant 1$, et donc $(u_n)$ est minorée par $\dfrac{1}{2}$ et ne peut pas converger vers $l = 0$.

   Ainsi $l = 1$, et la suite $(u_n)$ converge donc vers 1.