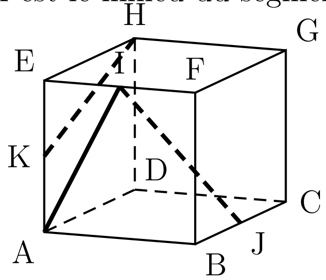
Devoir de révision de mathématiques

Exercice 1 On considère un cube ABCDEFGH. Le point I est le milieu du segment [EF], le point J est le milieu du segment [BC] et le point K est le milieu du segment [AE].



1. Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse,

   Dans la suite, on se place dans le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

2. a) Donner les coordonnées des points I et J.

   b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

   On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 3y - 2z + 2 = 0$ ainsi que les droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques ci-dessous :

$$d_1 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3+t \\ y & = & 8-2t \\ z & = & -2+3t \end{array}\right. ,t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 4+t \\ y & = & 1+t \\ z & = & 8+2t \end{array}\right. ,t \in \mathbb{R}.$$

3. Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.
4. Montrer que la droite d_2 est parallèle au plan $\mathcal{P}$.
5. Montrer que le point L$(4\,;\,0\,;\,3)$ est le projeté orthogonal du point M$(5\,;\,3\,;\,1)$ sur le plan $\mathcal{P}$.

Exercice 2 Dans l'espace, on considère un tétraèdre $ABCD$ dont les faces ABC, ACD et ABD sont des triangles rectangles et isocèles en A. On désigne par E, F et G les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.

On choisit AB pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ de l'espace.

1. On désigne par $\mathcal{P}$ le plan qui passe par A et qui est orthogonal à la droite (DF).
   On note H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (DF).

   a) Donner les coordonnées des points D et F.

   b) Donner une représentation paramétrique de la droite (DF).

   c) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

   d) Calculer les coordonnées du point H.

   e) Démontrer que l'angle $\widehat{\text{EHG}}$ est un angle droit.

2. On désigne par M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que $\overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DF}$. On note α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{EMG}$.
   Le but de cette question est de déterminer la position du point M pour que α soit maximale.

   a) Démontrer que $ME^2 = \dfrac{3}{2}t^2 - \dfrac{5}{2}t + \dfrac{5}{4}$.

   b) Démontrer que le triangle MEG est isocèle en M.

   En déduire que $ME \sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

   c) Justifier que α est maximale si et seulement si $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ est maximal.

   En déduire que α est maximale si et seulement si ME^2 est minimal.

   d) Conclure.