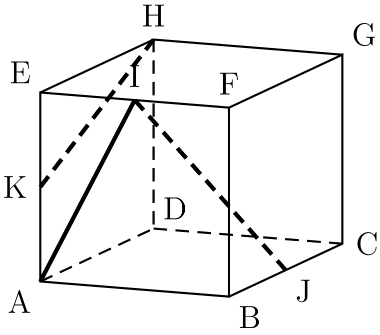
Corrigé du devoir de mathématiques

Exercice 1 *Baccalauréat général, spécialité mathématique, Amérique du Nord mai 2021 (candidats libres)*



1. On a A(0 ;0 ;0) et I(0,5 ;0 ;1), donc $\overrightarrow{AI}(0,5\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et K(0 ;0 ;0,5) et H(0 ;1 ;1) donc $\overrightarrow{KH}(0\ ;\ 1\ ;\ 0,5)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites (AI) et (KH) ne sont pas parallèles.
2. a) On a par lecture graphique I(0,5 ;0 ;1), et J(1 ;0,5 ;0)

   b) On a $\overrightarrow{IJ}(0,5\ ;\ 0,5\ ;\ -1)$, $\overrightarrow{AE}(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$, et $\overrightarrow{AC}(1\ ;\ 1\ ;\ 0)$.
   On a donc que $2\overrightarrow{IJ} + 2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC}$, ce qui montre que ces trois vecteurs sont coplanaires.

   Autre méthode 2, si on ne s'aperçoit pas de la relation suivante, on peut tous simplement la chercher : on cherche s'il existe trois réels a,b et c tels que

   $$a\overrightarrow{IJ} + b\overrightarrow{AE} + c\overrightarrow{AC} = \vec{0} \iff \left\{\begin{array}{rcccccl} 0,5a & + & & + & c & = & 0 \\ 0,5a & + & & + & c & = & 0 \\ -a & + & b & & & = & 0 \end{array}\right.$$

   dont la troisième équation donne $a = b$ puis $c = -0,5a$, et il y a une infinité de solutions, par exemple $a = b = 1$ et $c = -0,5$, d'où la relation

   $$\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{AE} - 0,5\overrightarrow{AC} = \vec{0} \iff \overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{AE} + 0,5\overrightarrow{AC}$$

   d_1 a pour vecteur directeur $\vec{u_1}(1\ ;\ -2\ ;\ 3)$ et d_2 a pour vecteur directeur $\vec{u_2}(1\ ;\ 1\ ;\ 2)$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles
3. Un vecteur directeur de d_1 est $\vec{u}_1(1;-2;3)$ et un vecteur directeur de d_2 est $\vec{u}_2(1,1,2)$.
   Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles.
4. Le plan a pour vecteur normal le vecteur $\vec{p}(1\ ;\ 3\ ;\ -2)$ et d_2 a pour vecteur directeur $\vec{u_2}(1\ ;\ 1\ ;\ 2)$.
   Or $\vec{p} \cdot \vec{u_2} = 1 + 3 - 4 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux donc la droite d_2 est parallèle au plan $\mathcal{P}$.
5. **Méthode 1.** Soit Δ la perpendiculaire à $\mathcal{P}$ contenant M. Cette droite a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{p}$, donc une équation paramétrique de Δ est :

   $$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 5 + 1t \\ y & = & 3 + 3t \\ z & = & 1 - 2t \end{array}\right. ,t \in \mathbb{R}.$$

   Le projeté L, de M sur le plan $\mathcal{P}$ a ses coordonnées qui vérifient les quatre équations :

   $$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 5 + 1t \\ y & = & 3 + 3t \\ z & = & 1 - 2t \\ x + 3y - 2z + 2 & = & 0 \end{array}\right. ,t \in \mathbb{R}.$$

   et donc, en substituant les expressions des coordonnées dans la dernière équation du plan, on obtient

   $$5 + t + 3(3 + 3t) - 2(1 - 2t) + 2 = 0 \iff t = -1$$

En reportant dans les trois premières équations du système, on trouve alors les coordonnées de L projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 5-1 \\ y &=& 3+3\times(-1) \\ z &=& 1-2\times(-1) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 4 \\ y &=& 0 \\ z &=& 3 \end{array}\right.$$

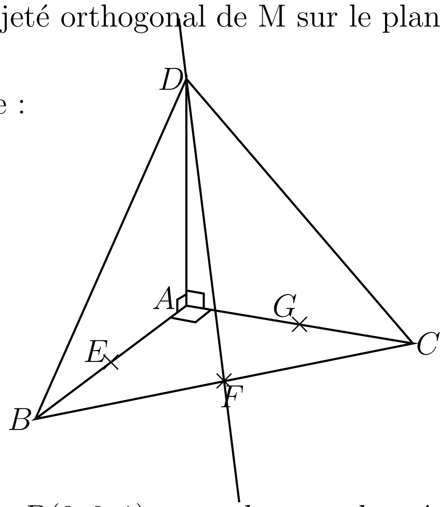
Donc le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathcal{P}$ est le le point L$(4\,;\,0\,;\,3)$.

Méthode 2. On a $\overrightarrow{ML}(-1\ ;\ -3\ ;\ 2)$, donc $\overrightarrow{ML}=-\vec{p}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.
D'autre part

$$L(4\ ;\ 0\ ;\ 3)\in\mathcal{P} \iff 4+3\times0-2\times3+2=6-6=0$$

est vraie, donc L est bien le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathcal{P}$.

Exercice 2 Tout d'abord, une figure :



1. a) On a $B(1;0;0)$, $C(0;1;0)$, et $D(0;0;1)$, pour les coordonnées des points directement liés au repère, et alors $F\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$ puisque F est le milieu de $[BC]$.

   b) Une représentation paramétrique de (DF) est donnée par $\overrightarrow{DM}=t\overrightarrow{DF}$ où $M(x;y;z)$ est un point de la droite de paramètre t, et $\overrightarrow{DF}\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};-1\right)$ est un vecteur directeur de la droite.

   Cette relation se réécrit sous la forme de la représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}t \\ y=\dfrac{1}{2}t \\ z=1-t \end{array}\right.$ $\quad t\in\mathbb{R}$.

   c) Le plan $\mathcal{P}$ est orthogonal à (DF), donc $\overrightarrow{DF}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ et une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}y-z+d=0$ où d est un réel.

   De plus, on sait que $A(0;0;0)\in\mathcal{P}$, et donc que $\dfrac{1}{2}\times0+\dfrac{1}{2}\times0-0+d=0 \iff d=0$.

   Ainsi, une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}y-z=0$

   d) Le point $H(x;y;z)$ est un point de (DF) et de $\mathcal{P}$, donc ses coordonnées sont celles d'un point de paramètre t dans la représentation paramétrique, et qui vérifient également l'équation du plan : il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que : $\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}t \\ y=\dfrac{1}{2}t \\ z=1-t \end{array}\right.$ et $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}y-z=0$.

En substituant les expressions de x, y et z en fonction du paramètre t dans l'équation de $\mathcal{P}$, on obtient :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t\right)-(1-t)=0 \iff \frac{3}{2}t-1=0 \iff t=\frac{2}{3}$$

Ainsi, H a pour coordonnées $\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}t=\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{1}{2}t=\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3} \\ z=1-t=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$, c'est à dire : $H\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

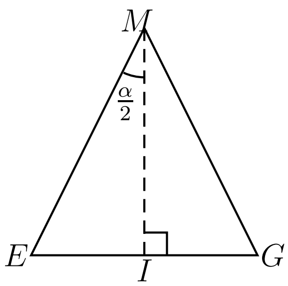
e) Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont :
$\overrightarrow{HE}=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3};0-\dfrac{1}{3};0-\dfrac{1}{3}\right)=\left(\dfrac{1}{6};-\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$ et $\overrightarrow{HG}=\left(0-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3};0-\dfrac{1}{3}\right)=\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{6};-\dfrac{1}{3}\right)$.
Comme on travaille avec un repère orthonormé, le produit scalaire des deux vecteurs peut être obtenu avec ces coordonnées, et on a : $\overrightarrow{HE}\cdot\overrightarrow{HG}=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{-1}{3}+\dfrac{-1}{3}\times\dfrac{1}{6}+\dfrac{-1}{3}\times\dfrac{-1}{3}=\dfrac{-1}{18}+\dfrac{-1}{18}+\dfrac{1}{9}=0$, ce qui montre que les vecteurs $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont orthogonaux, et donc que l'angle $\widehat{EHG}$ est droit.

2. On reconnaît dans le point M décrit, le point de paramètre t dans la représentation paramétrique de la droite (DF) donnée à la question 1. b..

a) Le point E est le milieu du segment $[AB]$, donc ses coordonnées sont $E\left(\dfrac{1}{2};0;0\right)$ et le vecteur $\overrightarrow{ME}$ a pour coordonnées : $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}t;0-\dfrac{1}{2}t;0-(1-t)\right)$, soit $\overrightarrow{ME}\left(\dfrac{1}{2}(1-t);-\dfrac{1}{2}t;t-1\right)$.
On a donc

$$ME^2=\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{ME}=\left(\frac{1}{2}(1-t)\right)^2+\left(-\frac{1}{2}t\right)^2+(t-1)^2=\frac{1}{4}(t^2-2t+1)+\frac{t^2}{4}+t^2-2t+1=\frac{3}{2}t^2-\frac{5}{2}t+\frac{5}{4}$$

b) On procède de façon analogue pour calculer la longueur MG : Le point G est le milieu du segment $[AC]$, donc ses coordonnées sont $E\left(0\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ 0\right)$ donc le vecteur $\overrightarrow{MG}$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{MG}\left(0-\dfrac{1}{2}t\ ;\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}t\ ;\ 0-(1-t)\right)$, soit $\overrightarrow{MG}\left(-\dfrac{1}{2}t\ ;\ \dfrac{1}{2}(1-t)\ ;\ t-1\right)$.
On a donc $MG^2=\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MG}=\left(-\dfrac{1}{2}t\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}(1-t)\right)^2+(t-1)^2=\dfrac{t^2}{4}+\dfrac{1}{4}(t^2-2t+1)+t^2-2t+1=\dfrac{3}{2}t^2-\dfrac{5}{2}t+\dfrac{5}{4}$.
On a donc $MG^2=\dfrac{3}{2}t^2-\dfrac{5}{2}t+\dfrac{5}{4}=ME^2$, et, comme MG et ME sont des longueurs, donc des nombres positifs, on a bien $MG=ME$ et le triangle MEG est isocèle.
Dans le plan (MEG), on a la situation :



On a alors, dans le triangle EIM, $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\frac{EG}{2}}{ME} \iff ME\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{EG}{2}$. Or $E\left(\dfrac{1}{2};0;0\right)$ et $G\left(0;\dfrac{1}{2};0\right)$, d'où $\overrightarrow{EG}\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$, et donc, $EG=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+0^2}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On obtient bien ainsi, $ME\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{EG}{2}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

c) α désigne la mesure en radians d'un angle géométrique, et donc $\alpha\in[0;\pi]$. On a alors $\dfrac{\alpha}{2}\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, intervalle sur lequel la fonction sinus est croissante :

α	0		π
$\dfrac{\alpha}{2}$	0	$\nearrow$	$\dfrac{\pi}{2}$
$\sin\dfrac{\alpha}{2}$	0	$\nearrow$	1

On en déduit en particulier que : α maximal $\iff \sin\dfrac{\alpha}{2}$ maximal.

De plus, on a d'après la question précédente, $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}ME}$.

Donc, $\sin\dfrac{\alpha}{2}$ est maximal lorsque ME est minimal, et donc lorsque ME^2 est minimal car la fonction carré étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, ME et ME^2 ont le même sens de variation.

d) On avait $ME^2=\dfrac{3}{2}t^2-\dfrac{5}{2}t+\dfrac{5}{4}$. En notant $f(t)=ME^2$, on définit une fonction f trinôme du second degré, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et telle que $f'(t)=3t-\dfrac{5}{2}$ et qui est donc décroissante sur $\left[-\infty;\dfrac{5}{6}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{5}{6};+\infty\right[$. En particulier f, donc ME^2, donc aussi ME, a un minimum en $t=\dfrac{5}{6}$.
La position du point M telle que la mesure de l'angle soit maximale est donc celle atteinte pour le paramètre $t=\dfrac{5}{6}$, soit $M\left(\dfrac{5}{12}\ ;\ \dfrac{5}{12}\ ;\ \dfrac{1}{6}\right)$.