Correction du devoir de mathématiques

Exercice 1 Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A(-2;2)$ et $B(4;1)$, et la droite D d'équation $x+y+4=0$.

1. On a $M(x;y)\in(AB)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires, et donc, avec $\overrightarrow{AB}(6;-1)$ et $\overrightarrow{AM}(x+2;y-2)$, d'où

$$\begin{aligned} M(x;y)\in(AB) &\iff 6(y-2)-(-1)(x+2)=0 \\ &\iff x+6y-10=0 \end{aligned}$$

2. Un vecteur normal à D est $\vec{n}(1;1)$ qui est aussi un vecteur normal de d_1, et donc

$$\begin{aligned} M(x;y)\in d_1 &\iff \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}_1=0 \\ &\iff 1(x+2)+1(y-2)=0 \\ &\iff x+y=0 \end{aligned}$$

3. $\vec{n}(1;1)$ est maintenant un vecteur directeur de d_2, et $M(x;y)\in d_2$ si et seulement si $\overrightarrow{BM}(x-4;y-1)$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, soit

$$1(x-4)-1(y-1)=0 \iff x-y-3=0$$

4. On a

$$I\in d_1\cap d_2 \iff \left\{\begin{array}{l} x+y=0 \\ x-y-3=0 \end{array}\right.$$

En ajoutant ces deux équations on obtient $2x-3=0$, soit $x=3/2$, puis avec la première, $y=-3/2$.
Finalement, on a obtenu $I\left(3/2;-3/2\right)$.

Exercice 2

1. $J\left(1;0;\frac{1}{2}\right)$ et $K\left(\frac{1}{2};1;1\right)$
2. On a d'une part

$$\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AJ}=AK\times AJ\times\cos\left(\widehat{KAJ}\right)$$

avec $AK=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2+1^2}=\dfrac{3}{2}$ et $AJ=\sqrt{1^2+0^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ d'où

$$\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AJ}=\frac{3\sqrt{5}}{4}\cos\left(\widehat{KAJ}\right)$$

Par ailleurs, on a aussi $\overrightarrow{AJ}\left(1;0;\frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{AK}\left(\frac{1}{2};1;1\right)$ d'où

$$\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AJ}=1\times\frac{1}{2}+0\times1+\frac{1}{2}\times1=1$$

On a donc finalement,

$$\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AJ}=\frac{3\sqrt{5}}{4}\cos\left(\widehat{KAJ}\right)=1 \iff \cos\left(\widehat{KAJ}\right)=\frac{4}{3\sqrt{5}}$$

et enfin, avec une calculatrice, on trouve

$$\widehat{KAJ}\simeq 53,4^\circ$$

3. On a

$$JK=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+(1-0)^2+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

4. Un vecteur directeur de (KJ) est $\overrightarrow{KJ}\left(\frac{1}{2};-1;-\frac{1}{2}\right)$, et on a donc la représentation paramétrique

$$(KJ):\left\{\begin{array}{lcl} x &=& \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}t \\ y &=& 1-t \\ z &=& 1-\dfrac{1}{2}t \end{array}\right.\ ,\ t\in\mathbb{R}$$

5. La droite (AG) passe par $A(0;0;0)$ et est dirigée par $\overrightarrow{AG}(1;1;1)$ et a donc pour représentation paramétrique

$$(AG):\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t \\ y &=& t \\ z &=& t \end{array}\right.\ ,\ t\in\mathbb{R}$$

Maitenant, les droites (AG) et (KJ) sont sécantes si et seulement si il existe deux réels t et t' tels que

$$\left\{\begin{array}{lclcl} x &=& \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}t &=& t' \\ y &=& 1-t &=& t' \\ z &=& 1-\dfrac{1}{2}t &=& t' \end{array}\right.$$

Les deux dernières équations donnent alors

$$t'=1-t=1-\frac{1}{2}t\Longrightarrow t=0$$

ce qui est impossible car alors alors la première équation donne $t'=\frac{1}{2}$ tandis que la deuxième et la troisième donnent $t'=1$.

Les droites (AG) et (KJ) ne sont donc pas sécantes.

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x+\dfrac{7}{2}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan.
On a $f'(x)=x-1$ et donc, la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0 a pour équation

$$\begin{aligned} T_0:\ \ y&=f'(0)(x-0)+f(0)=-x+\frac{7}{2} \\ \iff\ & x+y-\frac{7}{2}=0 \end{aligned}$$

et la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 2 a pour équation

$$\begin{aligned} T_2:\ \ y&=f'(2)(x-2)+f(2)=1(x-2)+\frac{7}{2}=x-\frac{1}{2} \\ \iff\ & -x+y+\frac{1}{2}=0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\vec{n}_0(1;1)$ et $\vec{n}_2(-1;1)$ sont des vecteurs normaux respectifs de ces deux droites, et comme

$$\vec{n}_0\cdot\vec{n}_2=1\times(-1)+1\times 1=0$$

ces deux vecteurs sont orthogonaux, tout comme les droites qui sont donc bien perpendiculaires.