Devoir de mathématiques

Exercice 1 f est une fonction polynôme et donc, en particulier, est dérivable deux fois avec

$$f'(x) = x^3 - x^2 - x + 7$$

et

$$f''(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

La convexité de f est donnée par le signe de sa dérivée, qui est une trinôme du second degré de discriminant $\Delta = 16 > 0$ et qui admet donc deux racines $x_1 = 1$ et $x_2 = -\dfrac{1}{3}$.
On obtient alors le signe,

x	$-\infty$		$-1/3$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

et ainsi f est convexe sur $]-\infty;-1/3] \cup [1;+\infty[$ et concave sur $[-1/3;1]$.
Enfin, la courbe de f admet deux points d'inflexion, en $x=-1/3$ et $x=1$.

Exercice 2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$

1. On a $f = uv$ avec $u(x) = x$ donc $u'(x) = 1$, et $v(x) = e^x$ donc $v'(x) = e^x$, et alors $f' = u' + uv'$, soit $f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$.
   On a alors

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
e^x		$+$		$+$	
$1+x$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$-1/e$	$\nearrow$	

2. Sur $[0;+\infty[$, f est continue (et même dérivable), strictement croissante, avec $f(0) < 1$ et $f(1) = e \simeq 2,7 > 1$.
   On en déduit, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (ou ici le théorème de la bijection) que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution $\alpha \in [0;1]$ et donc aussi sur $[0;+\infty[$ car f est strictement croissante.
   Avec la calculatrice, par balayage, ou dichotomie, on trouve $\alpha \simeq 0,57$

Exercice 3 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x+1}$, et la droite d d'équation $y = -2x + 2$.
On cherche à déterminer la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f et de la droite d.

1. On note φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^{-2x+1} + 2x - 2$.
   a) On a $\varphi'(x) = -2e^{-2x+1} + 2$, puis $\varphi''(x) = 4e^{-2x+1} > 0$, d'où$\varphi$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
   b) Une équation de la tangente à la courbe de φ au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ est

$$T : y = \varphi'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \varphi\left(\frac{1}{2}\right)$$

   avec $\varphi'(1/2) = -2e^{+}2 = 0$ et $\varphi(1/2) = e^0 + 1 - 2 = 0$, on trouve donc l'équation $T : y = 0$.
2. Comme φ est convexe, sa courbe est au-dessus de ses tangentes, en particulier au-dessus de T, ce qui s'écrit aussi que $\varphi(x) \geqslant 0$ pour tout réel x.
   En d'autres termes, $\varphi(x)$ est positif sur $\mathbb{R}$.

3. On a vu que $\varphi'(x) = -2e^{-2x+1} + 2$, et donc

$$\begin{aligned}\varphi'(x) > 0 &\iff -2e^{-2x+1} + 2 > 0\\ &\iff -2e^{-2x+1} > -2\\ &\iff e^{-2x+1} < 1 = e^0\\ &\iff -2x+1 < 0\end{aligned}$$

car exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et on obtient donc finalement

$$\varphi'(x) > 0 \iff x > 1/2$$

d'où le tableau de variation

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

avec le minimum $\varphi(0) = 0$.

On retrouve ainsi que $\varphi(x) \geqslant 0$ pour tout réel x, c'est-à-dire que φ est positive.

4. Comme on a $\varphi(x) = f(x) - y = e^{-2x+1} - \big(2x+2\big)$, le signe de φ nous donne la position relative de la courbe de f et de la droite d : $\mathcal{C}_f$ est toujours au-dessus de d.