Correction du devoir de mathématiques

Exercice 1

$$\begin{aligned}
&(E_1) : 2^{-2x+1} = 3\\
&\iff \ln\left(2^{-2x+1}\right) = \ln(3)\\
&\iff (-2x+1)\ln(2) = \ln(3)\\
&\iff (-2x+1) = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}\\
&\iff x = -\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(3)}{\ln(2)} - 1\right) \simeq -0,3
\end{aligned}$$

Pour la deuxième équation, il faut que $x > 0$ et que $3x+2 > 0 \iff x > -\dfrac{2}{3}$ soit donc, au final, on doit avoir $x > 0$.
Pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}
&(E_2) : \ln(x) + \ln(3x+2) = 0\\
&\iff \ln\big(x(3+2)\big) = 0\\
&\iff x(3x+2) = e^0 = 1\\
&\iff 3x^2 + 2x - 1 = 0
\end{aligned}$$

Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 16 > 0$ et admet deux racines $x_1 = -1$ et $x_2 = \dfrac{1}{3}$.
La première racine n'est pas solution de l'équation (E_1) qui a donc pour unique solution $x_2 = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 2 (u_n) est une suite géométrique de raison $1,2$ et de premier terme $u_0 = 2$.

a) Comme la raison cette suite est $q = 1,2 > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b) En utilisant la fonction logarithme, strictement croissante, on a

$$\begin{aligned}
u_n > 100 &\iff 2\times 1,2^n \geq 100\\
&\iff 1,2^n \geq 50\\
&\iff \ln\left(1,2^n\right) \geq \ln(50)\\
&\iff n\ln(1,2) \geq \ln(50)
\end{aligned}$$

puis en divisant par $\ln(1,2) > 0$, on obtient

$$u_n > 100 \iff n \geq \frac{\ln(50)}{\ln(1,2)} \simeq 21,5$$

et donc à partir du rang $n = 22$.

Exercice 3 *(Centres étrangers 10 juin 2021)*
On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + x\ln(0,95)$.

a) On a $f'(x) = \dfrac{1}{x} + \ln(0,95) = \dfrac{1 + x\ln(0,95)}{x}$

x	0		$-\dfrac{1}{\ln(0,95)}$		$+\infty$
$1 + x\ln(0,95)$		$+$	0	$-$	
x	0		$+$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

b) En 0, on a $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 0} x\ln(0,95) = 0$ et donc $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

En $+\infty$, on a une forme indéterminée. On factorise donc :

$$f(x) = x\left(\frac{\ln(x)}{x} + \ln(0,95)\right)$$

où, par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et donc, comme $\ln(0,95) < 0$, on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

c) La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[20;+\infty[$, avec $f(20) \simeq 2 > 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ donc, d'après le théorème de la bijection (ou corollaire du théorème des valeurs intermédiaires), il existe une unique solution α à l'équation $f(x) = 0$.

Avec la calculatrice, on trouve l'encadrement, à $0,1$ près, $87 < \alpha < 87,1$

d) On a $f'(x) = \frac{1}{x} + \ln(0,95)$ et donc $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, d'où f est concave sur $]0;+\infty[$.