Devoir de mathématiques

Terminale générale
Spécialité maths

Exercice 1 Déterminer les limites des suites suivantes :
$u_n = 2n^2 + n - \dfrac{3}{n-1}$; $v_n = -3n^2 + 2n + 1$; $w_n = \dfrac{n+3}{3n-5}$

Exercice 2 On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel, $u_{n+1} = 2 + 3u_n$.
Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n - 1$.

Exercice 3 On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et par la relation de récurrence, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 1$.
On pose de plus, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 3$.

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique, dont on précisera le premier terme et la raison.
2. Exprimer v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n.

Exercice 4 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{5x+6}{x+2}.$$

On a tracé ci-dessous, dans un repère orthonormé, la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f.

1. Démontrer que f est croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. On note α la solution.
   On donnera la valeur exacte de α puis on en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Sur la figure ci-dessous, placer les points M_0, M_1 et M_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2.
   Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?
4. Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$$