Corrigé du devoir maison: Suites et limites

Exercice 1

— On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n-1} = 0$ d'où, par addition des limites $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

— On a une forme indéterminée " $-\infty+\infty$" ; on factorise donc

$$v_n = -3n^2+2n+1 = -3n^2\left(1-\frac{2}{3n}-\frac{1}{3n^2}\right)$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{3n}-\dfrac{1}{3n^2}\right)=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -3n^2=-\infty$ d'où, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

— On a une forme indéterminée "$\dfrac{\infty}{\infty}$" ; on factorise donc

$$w_n = \frac{n+3}{3n-5} = \frac{n\left(1+\frac{3}{n}\right)}{3n\left(1-\frac{5}{3n}\right)} = \frac{1}{3}\times\frac{1+\frac{3}{n}}{1-\frac{5}{3n}}$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{5}{3n}\right)=1$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 2 On note, pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $\mathcal{P}_n : u_n = 3^n-1$.

Initialisation : Pour $n=0$, on a $u_0=0$, et $3^0-1=1-1=0$.
Ainsi, initialement au rang $n=0$, $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Supposons que pour un certain entier $n\geqslant 1$, $\mathcal{P}_n$ est vraie, c'est-à-dire que $u_n=3^n-1$, alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2+3u_n \\ &= 2+3\left(3^n-1\right) \\ &= 2+3^{n+1}-3 \\ &= 3^{n+1}-1 \end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ est encore vraie.

Conclusion : On a donc montré, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n=3^n-1$.

Exercice 3

1. Pour tout entier n, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1}-3 \\ &= \frac{2}{3}u_n+1-3 = \frac{2}{3}u_n-2 \\ &= \frac{2}{3}\left(u_n-3\right) = \frac{2}{3}v_n \end{aligned}$$

ce qui montre que la suite est géométrique de raison $q=\dfrac{2}{3}$ et de premier terme $v_0=u_0-3=-\dfrac{5}{2}$.

2. On a alors, pour tout entier n,

$$v_n = v_0q^n = -\frac{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

et alors

$$u_n = v_n+3 = -\frac{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n+3$$

Exercice 4 *Nouvelle Calédonie, 2014*

1. On dérive le quotient $f = \dfrac{u}{v}$, et on obtient $f'(x) = \dfrac{4}{(x+2)^2} > 0$ sur $[0;+\infty[$.

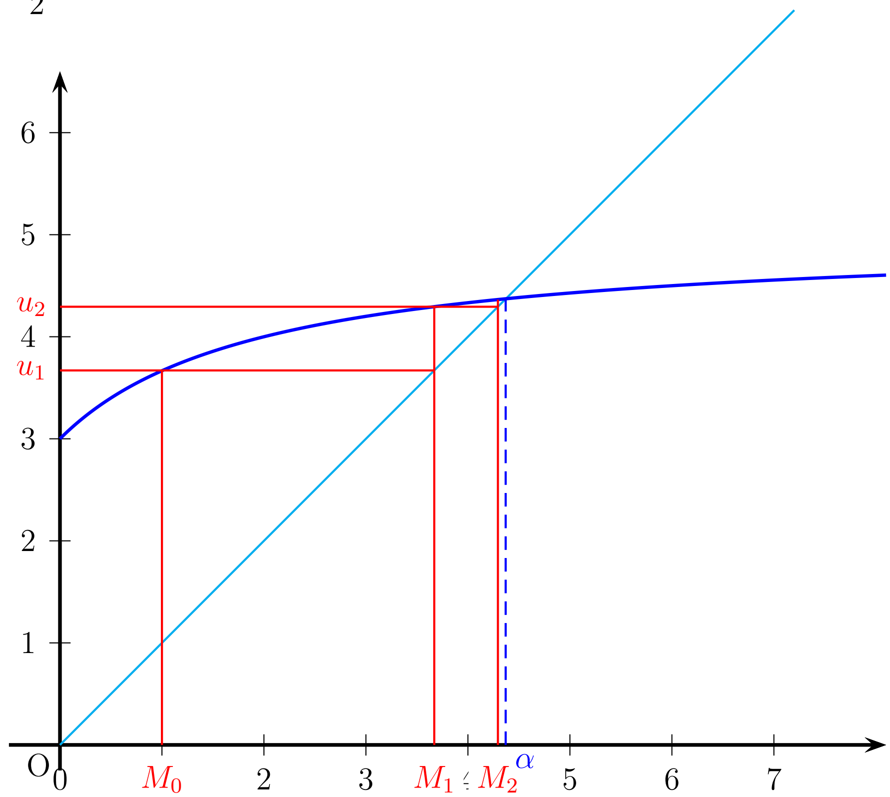
   Donc la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

2. $f(x) = x \iff \dfrac{5x+6}{x+2} = x \iff x^2 - 3x - 6$ car $x = -2$ n'est pas solution.

   Ce trinôme du second degré a pour discriminant $\Delta = 33 > 0$, et admet donc 2 solutions réelles : $\dfrac{3-\sqrt{33}}{2}$ et $\dfrac{3-\sqrt{33}}{2}$.

   Cette deuxième solution est négative donc l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0;+\infty[$ est $\alpha = \dfrac{3+\sqrt{33}}{2} \approx 4,37$.

3.



   On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et converge vers α.

4. On cherche à montrer la propriété $\mathcal{P}(n)$: $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ est vraie pour tout entier n.

   Initialisation : Pour $n = 0$, $u_n = u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_1 = f(u_0) = \dfrac{5\times 1+6}{1+2} = \dfrac{11}{3}$; et de plus $\alpha \approx 4,37$.

   On a $0 \leqslant 1 \leqslant \dfrac{11}{3} \leqslant \alpha$ ce qui signifie que la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité : On suppose la propriété $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier n, c'est-à-dire : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.
   On sait d'après la question **1.** que la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ donc : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha \Longrightarrow f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(\alpha)$
   $f(0) = 3 \geqslant 0$, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$.
   De plus, α est solution de l'équation $f(x) = x$ donc $f(\alpha) = \alpha$.
   On a donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha$ et la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vraie.

   Conclusion : On a donc démontré d'après le principe de récurrence, que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.