

Devoir de mathématiques

Exercice 1 Déterminer les primitives des fonctions $f(x) = -6x^3 + \frac{2}{x}$ et $g(x) = \frac{2x^2}{3x^3 + 5}$

Exercice 2 La publicité d'un jeu annonce une probabilité que la probabilité de gagner est de une chance sur 50 et "ainsi, que tout joueur tentant sa chance régulièrement chaque semaine gagne en moins d'un an!".

- a) Calculer la probabilité pour un tel joueur, jouant donc régulièrement chaque semaine pendant un an, de gagner au moins une fois à ce jeu.
Que penser de cette publicité ?
- b) Combien de semaines consécutives devrais-je jouer pour avoir une probabilité de gagner au moins une fois supérieure à 99% ?

Exercice 3 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par l'expression $f(x) = 1 - e^{-2x^2}$.

1. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(E) : y' + 4xy = 4x$.
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$, et les éventuelles asymptotes à la courbe de f .
3. Étudier le sens de variation de f .
4. Étudier la convexité de f .

Exercice 4 Soit la suite numérique (u_n) définie sur \mathbf{N} par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1. a. Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n \leq n + 3$.
- b. Démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n).$$

- c. En déduire une validation de la conjecture précédente.
2. On désigne par (v_n) la suite définie sur \mathbf{N} par $v_n = u_n - n$.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
 - b. En déduire l'expression de u_n en fonction de n , puis sa limite.