Devoir de mathématiques

Exercice 1 $F(x) = -\dfrac{3}{2}x^4 + 2\ln(x) + k$ et $G(x) = \dfrac{2}{9}\ln\left(3x^3+5\right) + k$

Exercice 2

a) On répète $n = 52$ fois (52 semaines dans une année) l'expérience aléatoire "jouer à ce jeu", dont le succès est d'y gagner avec la probabilité $p = 1/50 = 0,02$. On peut raisonnablement supposer ces répétitions identiques et indépendantes, et on note X la variable aléatoire égale au nombre de succès. On sait alors que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 52$ et $p = 0,02$, et donc que la probabilité de gagner au moins une fois est

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,98^{52} \simeq 0,65 = 65\%$$

La probabilité de gagner en moins d'un an est au plus de 65%, et donc tout joueur ne gagne pas en moins d'un an : l'annonce est fausse.

b) On cherche cette fois le nombre n de jours. De même que précédemment, X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,02$, et la probabilité de gagner au moins une fois en n jours est

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,98^n$$

On cherche donc n tel que

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) = 1 - 0,98^n \geq 0,99 &\iff 0,98^n \leq 1 - 0,99 = 0,01 \\ &\iff n\ln(0,98) \leq \ln(0,01) \\ &\iff n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,98)} \end{aligned}$$

car $\ln(0,98) < 0$.
On trouve donc

$$n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,98)} \simeq 227,9$$

et donc, il faudrait jouer au moins $n = 228$ semaines consécutives, soit environ quatre ans et demi.

Exercice 3 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = 1 - e^{-2x^2}$.

1. On a $f = 1 - e^u$, avec $u(x) = -2x^2$ donc $u'(x) = -4x$, d'où $f' = -u'e^u$, ou encore $f'(x) = 4xe^{-2x^2}$.
   On calcule alors
   $$f((x) + 4xf(x) = 4xe^{-2x^2} + 4x\left(1 - e^{-2x^2}\right) = 4x$$
   ce qui montre que f est solution de l'équation différentielle (E).
2. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0$, d'où
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$
   On en déduit que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote verticale à la courbe de f en $-\infty$ et $+\infty$.
3. On a trouvé que $f'(x) = 4xe^{-2x^2}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$4x$		$-$	0	$+$	
e^{-2x^2}		$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

4. La convexité de f est donnée par le signe de sa dérivée seconde : $f' = 4uv$, avec $u(x) = x$ donc $u'(x) = 1$, et $v(x) = e^{-2x^2}$ donc $v'(x) = -4xe^{-x^2}$.
   On a alors $f'' = 4\left(u'v + uv'\right)$, soit

$$\begin{aligned} f''(x) &= 4\left(e^{-2x^2} - 4x^2e^{-2x^2}\right) \\ &= 4e^{-2x^2}\left(1 - 4x^2\right) \end{aligned}$$

   Le trinôme du second degré $1 - 4x^2$ admet deux racines :

$$1 - 4x^2 = 0 \iff x^2 = \frac{1}{4} \iff x = \pm\frac{1}{2}$$

   et donc

x	$-\infty$		$-1/2$		$1/2$		$+\infty$
e^{-2x^2}		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$1-4x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		concave	$\vert$	convexe	$\vert$	concave	

Exercice 4 *D'après Bac S, 20 juin 2013*

1. a. Nous allons montrer par récurrence, pour tout entier naturel n, la propriété $\mathcal{P}_n$: $u_n \leqslant n + 3$.
   Initialisation : Puisque l'on a $u_0 = 2$ et $0 + 3 = 3$, on vérifie bien :
   $u_0 \leqslant 0 + 3$: *la propriété* $\mathcal{P}_0$ *est bien vraie.*

   Hérédité : Pour un entier k naturel donné, on suppose la propriété $\mathcal{P}_k$ vraie.
   On a $u_{k+1} = \frac{2}{3}u_k + \frac{1}{3}k + 1$.
   Par hypothèse de récurrence : $u_k \leqslant k + 3$
   En multipliant par un nombre positif : $\frac{2}{3}u_k \leqslant \frac{2}{3}(k+3)$, soit $\frac{2}{3}u_k \leqslant \frac{2}{3}k + 2$
   Puis, en ajoutant un même nombre dans chaque membre : $\frac{2}{3}u_k + \frac{1}{3}k + 1 \leqslant \frac{2}{3}k + 2 + \frac{1}{3}k + 1$
   Ce qui donne : $u_{k+1} \leqslant k + 3 \leqslant k + 4$. On a donc $u_{k+1} \leqslant (k+1) + 3$, c'est à dire que la propriété $\mathcal{P}_{k+1}$ est encore vraie.
   Conclusion : Puisque la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie et que nous avons prouvé l'hérédité, on peut en déduire que pour tout entier naturel n, on a $\mathcal{P}_n$ vraie, c'est à dire que pour tout entier naturel n, on a bien $u_n \leqslant n + 3$.

   b. $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + \frac{3}{3}$
   On a donc bien $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3} \times (-u_n + n + 3) = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$.

   c. Comme on l'a montré à la question précédente, pour tout n naturel, on a $u_n \leqslant n + 3$ ce qui équivaut à dire que la différence $n + 3 - u_n$ est positive, et elle le reste en étant multipliée par $\frac{1}{3}$, donc la différence entre deux termes consécutifs étant positive, on confirme bien que notre conjecture était correcte : la suite (u_n) est bien croissante, dès le rang 0.

2. a. Exprimons, pour un entier n naturel quelconque, v_{n+1} en fonction de v_n :
   $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(u_n - n)$
   Donc $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$.
   La relation de récurrence obtenue confirme que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 = 2$.

b. On peut donc en déduire que pour totu entier n, $v_n = v_0 \times q^n = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

Enfin, puisque l'on a, pour tout n, $v_n = u_n - n$, on en déduit : $u_n = v_n + n = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + n$.

Puisque la raison $-1 < q = 2/3 < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$, puis, par addition des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.