# Devoir de mathématiques

**Exercice** 1 Dans l'espace muni du repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ on considère le plan $P$ d'équation $x+y+z-3=0$ ainsi que le point $M(2;-3;1)$.

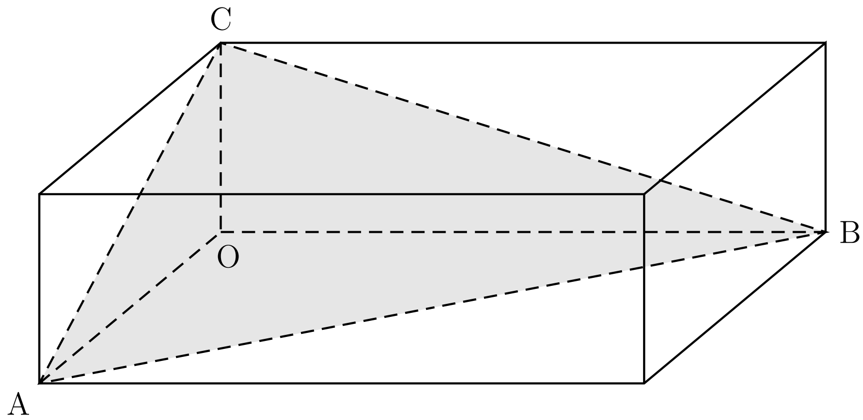
a) Le point $M$ est-il dans le plan $P$ ?

b) Donner une représentation paramétrique de la droite $D$ passant par $M$ et orthogonale à $P$.

c) Déterminer les coordonnées du point $H$ intersection de $D$ et $P$.

d) En déduire la distance du point $M$ au plan $P$.

**Exercice** 2 Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points : A de coordonnées (2 ; 0 ; 0), B de coordonnées (0 ; 3 ; 0) et C de coordonnées (0 ; 0 ; 1).




L'objectif de cet exercice est de calculer l'aire du triangle ABC.

1. a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

   b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $3x+2y+6z-6=0$.

2. On note $d$ la droite passant par O et orthogonale au plan (ABC).

   a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $d$.

   b) Montrer que la droite $d$ coupe le plan (ABC) au point H de coordonnées $\left(\frac{18}{49} ; \frac{12}{49} ; \frac{36}{49}\right)$.

   c) Calculer la distance OH.

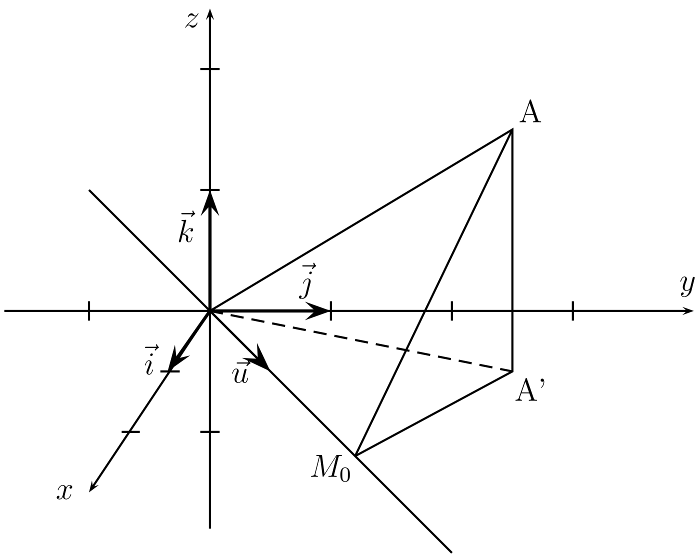
3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V=\frac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et $h$ est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.
   En calculant de deux façons différentes le volume de la pyramide OABC, déterminer l'aire du triangle ABC.

**Exercice** 3

Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ on considère

- le point A de coordonnées (1 ; 3 ; 2),
- le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$
- la droite $d$ passant par l'origine O du repère et admettant pour vecteur directeur $\vec{u}$.

Le but de cet exercice est de déterminer le point de $d$ le plus proche du point A et d'étudier quelques propriétés de ce point.
On pourra s'appuyer sur la figure ci-contre pour raisonner au fur et à mesure des questions.




1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $d$.
2. Soit $t$ un nombre réel quelconque, et $M$ un point de la droite $d$, le point $M$ ayant pour coordonnées $(t\ ;\ t\ ;\ 0)$.
   a) On note A$M$ la distance entre les points A et $M$. Démontrer que :
   $$AM^2 = 2t^2 - 8t + 14.$$
   b) Démontrer que le point $M_0$ de coordonnées $(2\ ;\ 2\ ;\ 0)$ est le point de la droite $d$ pour lequel la distance $AM$ est minimale.
   On admettra que la distance $AM$ est minimale lorsque son carré $AM^2$ est minimal.
3. Démontrer que les droites $(AM_0)$ et $d$ sont orthogonales.
4. On appelle $A'$ le projeté orthogonal du point $A$ sur le plan d'équation cartésienne $z = 0$. Le point $A'$ admet donc pour coordonnées $(1\ ;\ 3\ ;\ 0)$.
   Démontrer que le point $M_0$ est le point du plan $(AA'M_0)$ le plus proche du point O, origine du repère.
5. Calculer le volume de la pyramide $OM_0A'A$.
   On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \dfrac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et $h$ est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.