# Correction du devoir de mathématiques

**Exercice** 1

a) $x_M + y_M + z_M - 3 = 2 - 3 + 1 - 3 = -3 \neq 0$ donc $M \notin P$.

b) $\vec{n}(1;1;1)$ est un vecteur normal de $P$, la droite $D$ passant par $M$ et orthogonale à $P$ admet donc comme représentatation paramétrique : $\begin{cases} x &= 2+t \\ y &= -3+t \\ z &= 1+t \end{cases}$

c) Comme $H \in D$, il existe un réel $t$ tel que $H$ ait pour coordonnées $\begin{cases} x &= 2+t \\ y &= -3+t \\ z &= 1+t \end{cases}$

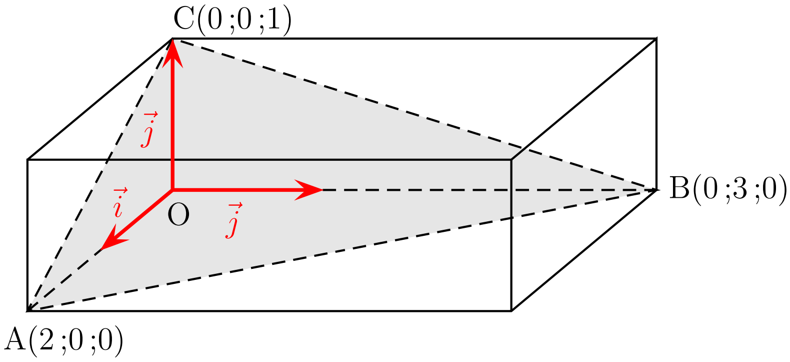
Comme de plus $H \in P$, ses coordonnées vérifient l'équation de $P$ donc $x + y + z - 3 = 2 + t - 3 + t + 1 + t - 3 = 0$, soit $3t - 3 = 0$ et donc $t = 1$.

On a ainsi $H(3; -2; 2)$.

d) La distance du point $M$ au plan $P$ est $HM$ car $H$ est le projeté orthogonal de $M$ sur le plan $P$.

Comme $\overrightarrow{HM}(-1; -1; -1)$, on a donc $HM = \sqrt{3}$.

**Exercice** 2 *(Bac général, spécialité mathématiques, 15 mars 2021)*




1. a) Pour montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC), il suffit de démontrer que ce vecteur est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABC), par exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

   On a $\overrightarrow{AB}(-2\ ;\ 3\ ;\ 0)$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = -2 \times 3 + 3 \times 2 + 0 \times 6 = 0$ et ainsi $\overrightarrow{AB} \perp \vec{n}$.

   De même, $\overrightarrow{AC}(-2\ ;\ 0\ ;\ 1)$ donc $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = -2 \times 3 + 0 \times 2 + 1 \times 6 = 0$ et ainsi, aussi, $\overrightarrow{AC} \perp \vec{n}$.

   On en déduit que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).

   b) $M(x;y;z) \in (ABC) \iff \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

   Or $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x-2\ ;\ y\ ;\ z)$.

   et donc $M \in (ABC) \iff (x-2) \times 3 + y \times 2 + z \times 6 = 0 \iff 3x + 2y + 6z - 6 = 0$

   Le plan (ABC) a donc pour équation cartésienne $3x + 2y + 6z - 6 = 0$.

2. a) La droite $d$ est orthogonale au plan (ABC) donc elle a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{n}$ normal à (ABC).

   De plus elle passe par le point O de coordonnées $(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$.

   Une représentation paramétrique de la droite $d$ est donc $\begin{cases} x = 3k \\ y = 2k, \quad k \in \mathbb{R} \\ z = 6k \end{cases}$

   b) La droite $d$ est orthogonale au plan (ABC), et donc elle le coupe en un point H.

   Soit $H(x;y;z)$ alors on a $\begin{cases} x &= 3k \\ y &= 2k \\ z &= 6k \\ 3x + 2y + 6z - 6 &= 0 \end{cases}$

Donc, en substituant dans la troisième équation, on obtient

$$\begin{aligned} & 3\times 3k+2\times 2k+6\times 6k-6=0\\ \iff & 9k+4k+36k=6\\ \iff & k=\frac{6}{49}\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\left\{\begin{array}{rclcl} x &=& 3k &=& \dfrac{18}{49}\\ y &=& 2k &=& \dfrac{12}{49}\\ z &=& 6k &=& \dfrac{36}{49}\end{array}\right.$$

et on a donc trouvé les coordonnées $H\left(\dfrac{18}{49}\,;\,\dfrac{12}{49}\,;\,\dfrac{36}{49}\right)$.

c) On calcule alors directement

$$\begin{aligned} OH^2 &= (x_{\mathrm{H}}-x_{\mathrm{O}})^2+(y_{\mathrm{H}}-y_{\mathrm{O}})^2+(z_{\mathrm{H}}-z_{\mathrm{O}})^2\\ &= \left(\frac{18}{49}\right)^2+\left(\frac{12}{49}\right)^2+\left(\frac{36}{49}\right)^2\\ &= \frac{18^2+12^2+36^2}{49^2}=\frac{1764}{49^2}\end{aligned}$$

On obtient donc la distance $OH=\sqrt{\dfrac{1764}{49^2}}=\frac{42}{49}=\dfrac{7\times 6}{7\times 7}=\dfrac{6}{7}$.

3. — On peut prendre le triangle OAB pour base de la pyramide OABC, la hauteur est alors OC, et le volume

$$\mathcal{V}=\frac{1}{3}\times\mathcal{B}\times OC$$

avec $\mathcal{B}=\mathcal{A}_{OAB}=\dfrac{1}{2}\times OA\times OB=\dfrac{1}{2}\times 2\times 3=3$ et OC $=1$.
On obtient donc le volume

$$\mathcal{V}=\frac{1}{3}\times 3\times 1=1$$

— On peut aussi prendre le triangle ABC pour base de la pyramide OABC, la hauteur est alors OH, et le volume est

$$\mathcal{V}=\frac{1}{3}\times\mathcal{B}'\times OH$$

avec $\mathcal{B}'$ est l'aire du triangle ABC.
On a ici $OH=\dfrac{6}{7}$ et $\mathcal{V}=1$ donc

$$\mathcal{V}=1=\frac{1}{3}\times\mathcal{B}'\times\frac{6}{7}$$

d'où on déduit que

$$\mathcal{B}'=\mathcal{A}_{ABC}==\frac{49}{14}=\frac{7}{2}$$

.

**Exercice 3** *(Bac général, spécialité mathématiques, métropole, 7 juin 2021)*

1. $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (d) \iff \overrightarrow{OM} = t\vec{u}$, avec $t \in \mathbb{R}$, soit :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t \\ y &=& t \\ z &=& 0 \end{array}\right. , t \in \mathbb{R}$$

2. a) De $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} t-1 \\ t-3 \\ 0-2 \end{pmatrix}$, on calcule :

$$\begin{aligned} AM^2 &= (t-1)^2 + (t-3)^2 + (-2)^2 \\ &= t^2 + 1 - 2t + t^2 + 9 - 6t + 4 \\ &= 2t^2 - 8t + 14 \end{aligned}$$

   b) L'expression précédente est une expression du second degré. On peut soit étudier les variations (dérivée, signe, ...) soit se rappeler que le sommet de la parabole est en $t_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-8}{2 \times 2} = 2$.
   On a alors $AM_0 = 2t_0^2 - 8t_0 + 14 = 6$, et donc la plus petite distance est $AM_0 = \sqrt{6}$ avec $M_0(2\ ;\ 2\ ;\ 0)$.

3. On a $\overrightarrow{AM_0}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $(d)$.
   On a $\overrightarrow{AM_0} \cdot \vec{u} = 1 - 1 + 0 = 0$ : les vecteurs sont orthogonaux donc les droites $(\text{A}M_0)$ et $d$ sont orthogonales.

4. $\vec{u}$ est orthogonal au plan horizontal d'équation $z = 0$. Comme A$'$ et $M_0$ appartiennent à ce plan le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{A'M_0}$.
   Donc le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $(\text{AA}'M_0)$,donc la droite $(d)$ est orthogonale au plan $(\text{AA}'M_0)$. Le point $M_0$ est donc le projeté orthogonal de O sur le plan $(\text{AA}'M_0)$, donc $\text{O}M_0$ est la distance la plus courte du point O au plan $(\text{AA}'M_0)$.

5. On peut prendre la base $AA'M_0$ qui est un triangle rectangle en $A'$, avec $AA' = 2$ et donc $A'M_0 = \sqrt{(2-1)^2 + (2-3)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$.
   On a donc $\mathcal{A}_{AA'M_0} = \dfrac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$.
   D'autre part, la hauteur correspondante est $h = OM_0 = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
   On obtient finalement

$$V = (AA'M_0) = \frac{\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}{3} = \frac{4}{3}$$