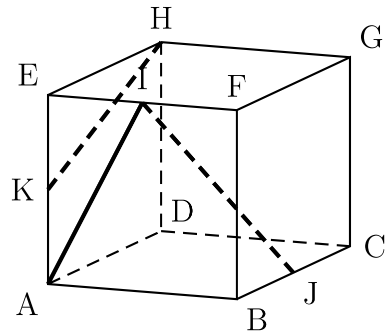
Correction du devoir de mathématiques

Baccalauréat général, spécialité mathématique, Amérique du Nord mai 2021 (candidats libres)

Exercice 1



1. On a A(0 ;0 ;0) et I(0,5 ;0 ;1), donc $\overrightarrow{AI}(0,5\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et K(0 ;0 ;0,5) et H(0 ;1 ;1) donc $\overrightarrow{KH}(0\ ;\ 1\ ;\ 0,5)$.
   Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites (AI) et (KH) ne sont pas parallèles.
2. a) On a par lecture graphique I(0,5 ;0 ;1), et J(1 ;0,5 ;0)

   b) On a $\overrightarrow{IJ}(0,5\ ;\ 0,5\ ;\ -1)$, $\overrightarrow{AE}(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$, et $\overrightarrow{AC}(1\ ;\ 1\ ;\ 0)$.
   On a donc que $2\overrightarrow{IJ} + 2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC}$, ce qui montre que ces trois vecteurs sont coplanaires.

   Autre méthode 2, si on ne s'aperçoit pas de la relation suivante, on peut tous simplement la chercher : on cherche s'il existe trois réels a,b et c tels que

$$a\overrightarrow{IJ} + b\overrightarrow{AE} + c\overrightarrow{AC} = \vec{0} \iff \left\{\begin{array}{rcccccc} 0,5a & + & & + & c & = & 0 \\ 0,5a & + & & + & c & = & 0 \\ -a & + & b & & & = & 0 \end{array}\right.$$

   dont la troisième équation donne $a = b$ puis $c = -0,5a$, et il y a une infinité de solutions, par exemple $a = b = 1$ et $c = -0,5$, d'où la relation

$$\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{AE} - 0,5\overrightarrow{AC} = \vec{0} \iff \overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{AE} + 0,5\overrightarrow{AC}$$

   d_1 a pour vecteur directeur $\vec{u_1}(1\ ;\ -2\ ;\ 3)$ et d_2 a pour vecteur directeur $\vec{u_2}(1\ ;\ 1\ ;\ 2)$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles
3. Un vecteur directeur de d_1 est $\vec{u}_1(1;-2;3)$ et un vecteur directeur de d_2 est $\vec{u}_2(1,1,2)$.
   Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles.
4. Le plan a pour vecteur normal le vecteur $\vec{p}(1\ ;\ 3\ ;\ -2)$ et d_2 a pour vecteur directeur $\vec{u_2}(1\ ;\ 1\ ;\ 2)$.
   Or $\vec{p} \cdot \vec{u_2} = 1 + 3 - 4 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux donc la droite d_2 est parallèle au plan $\mathcal{P}$.
5. **Méthode 1.** Soit Δ la perpendiculaire à $\mathcal{P}$ contenant M. Cette droite a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{p}$, donc une équation paramétrique de Δ est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 5 + 1t \\ y & = & 3 + 3t \\ z & = & 1 - 2t \end{array}\right. , t \in \mathbb{R}.$$

   Le projeté L, de M sur le plan $\mathcal{P}$ a ses coordonnées qui vérifient les quatre équations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 5 + 1t \\ y & = & 3 + 3t \\ z & = & 1 - 2t \\ x + 3y - 2z + 2 & = & 0 \end{array}\right. , t \in \mathbb{R}.$$

   et donc, en substituant les expressions des coordonnées dans la dernière équation du plan, on obtient

$$5 + t + 3(3 + 3t) - 2(1 - 2t) + 2 = 0 \iff t = -1$$

En reportant dans les trois premières équations du système, on trouve alors les coordonnées de L projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 5-1 \\ y & = & 3+3\times(-1) \\ z & = & 1-2\times(-1) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 4 \\ y & = & 0 \\ z & = & 3 \end{array}\right.$$

Donc le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathcal{P}$ est le le point L$(4\,;0\,;3)$.

Méthode 2. On a $\overrightarrow{ML}(-1\ ;\ -3\ ;\ 2)$, donc $\overrightarrow{ML}=-\vec{p}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.
D'autre part

$$L(4\ ;\ 0\ ;\ 3)\in\mathcal{P} \iff 4+3\times 0-2\times 3+2=6-6=0$$

est vraie, donc L est bien le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathcal{P}$.