Devoir de mathématiques

B

Exercice 1 *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.*
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{x}$.

On donne l'expression de la dérivée seconde f'' de f, définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f''(x)=\frac{2e^{2x}(2x^2-2x+1)}{x^3}$$

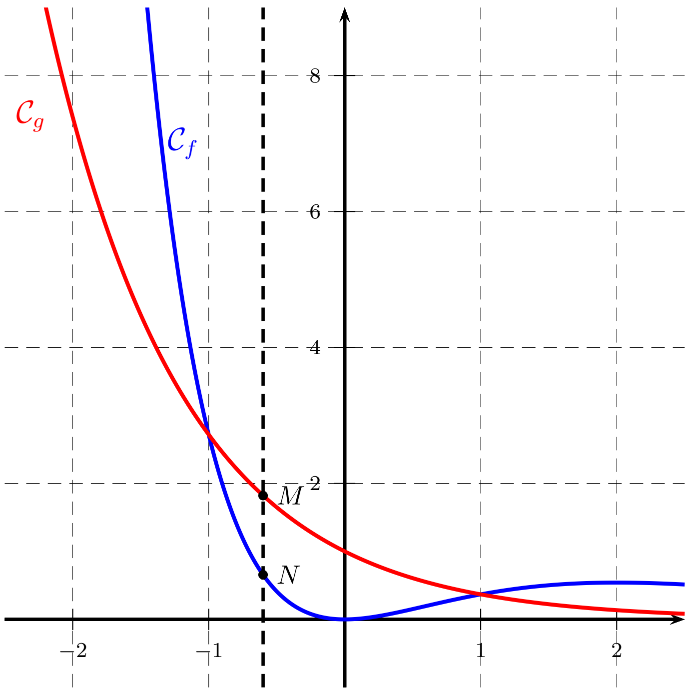
1. La fonction f', dérivée de f, est définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :
   - **a.** $f'(x)=2e^{2x}$
   - **b.** $f'(x)=\dfrac{e^{2x}(x-1)}{x^2}$
   - **c.** $f'(x)=\dfrac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$
   - **d.** $f'(x)=\dfrac{e^{2x}(1+2x)}{x^2}$.
2. La fonction f :
   - **a.** est décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$
   - **b.** est monotone sur $]0\ ;\ +\infty[$
   - **c.** admet un minimum en $\dfrac{1}{2}$
   - **d.** admet un maximum en $\dfrac{1}{2}$.
3. La fonction f admet pour limite en $+\infty$:
   - **a.** $+\infty$
   - **b.** 0
   - **c.** 1
   - **d.** e^{2x}.
4. La fonction f :
   - **a.** est concave sur $]0\ ;\ +\infty[$
   - **b.** est convexe $]0\ ;\ +\infty[$
   - **c.** est concave sur $\left]0\ ;\ \frac{1}{2}\right]$
   - **d.** est représentée par une courbe admettant un point d'inflexion.
5. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=0,75u_n+5$.
   On considère la fonction « seuil » suivante écrite en Python :

```
def seuil () :
    u = 2
    n = 0
    while u < 45 :
        u = 0,75*u + 5
        n = n+1
    return n
```

   Cette fonction renvoie :
   - **a.** la plus petite valeur de n telle que $u_n \geqslant 45$
   - **b.** la plus petite valeur de n telle que $u_n < 45$
   - **c.** la plus grande valeur de n telle que $u_n \geqslant 45$.

Exercice 2 Le graphique suivant représente, dans un repère orthogonal, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 e^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-x}$$



1. a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

   b) Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$, on considère les points M de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$ et N de coordonnées $(x\ ;\ g(x))$, et on note $d(x)$ la distance MN. On admet que : $d(x) = e^{-x} - x^2 e^{-x}$.
   On admet que la fonction d est dérivable sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$ et on note d' sa fonction dérivée.

   a) Montrer que $d'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(x^2 - 2x - 1\right)$.

   b) En déduire les variations de la fonction d sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.

   c) Déterminer l'abscisse commune x_0 des points M_0 et N_0 permettant d'obtenir une distance $d\left(x_0\right)$ maximale, et donner une valeur approchée à $0,1$ près de la distance M_0N_0.

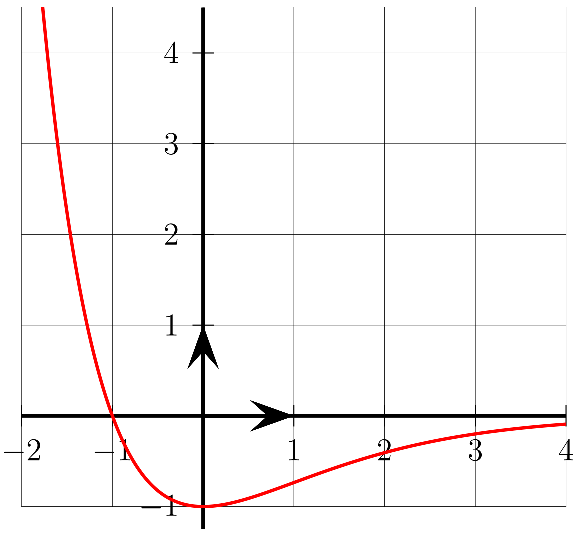
3. Soit Δ la droite d'équation $y = x + 2$.
   On considère la fonction h dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $h(x) = e^{-x} - x - 2$.
   En étudiant le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$, déterminer le nombre de points d'intersection de la droite Δ et de la courbe $\mathcal{C}_g$.

Exercice 3

Partie 1

On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la fonction dérivée f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.
À l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant les réponses :

1. Le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. La convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



Courbe représentant la **dérivée** f' de la fonction f.

Partie 2

On admet que la fonction f mentionnée dans la Partie 1 est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2)e^{-x}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{i}\right)$.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' et f'' les fonctions dérivées première et seconde de f respectivement.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f(x) = \dfrac{x}{e^x} + 2e^{-x}$.
   En déduire la limite de f en $+\infty$.
   Justifier que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.
   On admet que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
2. a) Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (-x-1)e^{-x}$.
   b) Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f et dresser son tableau de variations.
   c) Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-2\ ;\ -1]$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.
3. Déterminer, pour tout nombre réel x, l'expression de $f''(x)$ et étudier la convexité de la fonction f.
   Que représente pour la courbe $\mathcal{C}$ son point A d'abscisse 0 ?