Devoir de mathématiques $\boxed{\text{B}}$

Exercice 1 *QCM - Baccalauréat général, spécialité mathématiques, Métropole 7 juin 2021*

1. f est dérivable comme fonction quotient de fonctions dérivables, le dénominateur étant non nul sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, avec
$$f'(x) = \frac{2e^{2x} \times x - 1 \times e^{2x}}{x^2} = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$$
Réponse c.
2. Comme sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $x^2 > 0$ et $e^{2x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $2x-1$, soit $f'(x) > 0 \iff 2x - 1 > 0 \iff x > \dfrac{1}{2}$;
et donc $f'(x) < 0 \iff x < \dfrac{1}{2}$ et f est décroissante sur $\left]0\ ;\ \frac{1}{2}\right[$; et par ailleurs $f'(x) > 0 \iff x > \dfrac{1}{2}$ et f est croissante sur $\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$;
On a donc que f admet un minimum en $\dfrac{1}{2}$.
Réponse c.
3. On a, en posant $X = 2x$, $f(x) = 2 \times \dfrac{e^{2x}}{2x} = 2\dfrac{e^X}{X}$,et alors par croissances comparées,
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{X\to+\infty} 2\frac{e^X}{X} = +\infty$$
Réponse a.
4. Sur $]0\ ;\ +\infty[$, $x^3 > 0$ et $2e^{2x} > 0$, donc le signe de $f''(x)$ est celui du trinôme $2x^2 - 2x + 1$.
Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = -4 < 0$; il n'admet donc aucune racine, et il est de signe constant, ici positif, sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que $f''(x) \geqslant 0$ sur $]0; +\infty[$, et donc que la fonction y est convexe.
Réponse b.
5. **Réponse** a.

Exercice 2 *Baccalauréat, terminale générale spécialité mathématiques, 15 mars 2021*

1. a) Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont les points d'abscisses x solutions de l'équation $f(x) = g(x)$, soit
$$f(x) = g(x) \iff x^2e^{-x} = e^{-x} \iff (x^2-1)e^{-x} = 0$$
Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ donc en particulier $e^{-x} \neq 0$, et alors
$$f(x) = g(x) \iff x^2 - 1 = 0 \iff x = -1 \text{ ou } x = 1$$
Pour $x = -1$, $g(x) = e$, et pour $x = 1$, $g(x) = e^{-1}$.
Les coordonnées des points d'intersection sont donc $(-1\ ;\ e)$ et $(1\ ;\ e^{-1})$.
b) Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, revient à étudier le signe de la différence φ définie par
$$\varphi(x) = f(x) - g(x) = (x^2-1)e^{-x}$$

soit

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	
e^{-x}		$+$		$+$		$+$	
$(x^2-1)e^{-x}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc sur les intervalles $]-\infty\ ;\ -1[$ et $]1\ ;\ +\infty[$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$, et sur l'intervalle $]-1\ ;\ 1[$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous de la courbe $\mathcal{C}_g$,

2. a) On a $d(x) = (1-x^2)e^{-x}$, soit $d = uv$ avec $u(x) = 1-x^2$ donc $u'(x) = -2x$, et $v(x) = e^{-x}$ soit $v = e^w$ donc $v' = w'e^w$ et donc $v'(x) = -e^{-x}$. On a alors $d' = u'v + uv'$, soit

$$\begin{aligned} d'(x) &= -2xe^{-x} + (1-x^2)\left(-e^{-x}\right) \\ &= e^{-x}\left(-2x-1+x^2\right) \end{aligned}$$

b) Dans la dérivée précédente, on a $e^{-x} > 0$ pour tout réel x, et le trinôme du second degré a pour discriminant $\Delta = (-2)^2 + 4 = 8 > 0$ et admet donc deux racines $x_1 = \dfrac{2-\sqrt{8}}{2} = 1-\sqrt{2}$ et $x_2 = 1+\sqrt{2}$.
On a alors

x	$-\infty$		-1		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
e^{-x}		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
x^2-2x-1		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$d'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
d				$\nearrow$			$\searrow$			$\nearrow$	

— Sur l'intervalle $\left[-1\ ;\ 1-\sqrt{2}\right[$, $d'(x) > 0$ donc d est strictement croissante.
— Sur l'intervalle $\left]1-\sqrt{2}\ ;\ 1\right]$, $d'(x) < 0$ donc d est strictement décroissante.

c) D'après la question précédente, la distance $d(x)$ est maximale pour $x_0 = 1-\sqrt{2}$, et vaut alors $d\left(1-\sqrt{2}\right) \approx 1,3$

3. On étudie la fonction h.
La fonction h est dérivable, donc continue ssur $\mathbb{R}$, avec $h'(x) = -e^{-x} - 1$ donc, comme $e^{-x} > 0 \iff -e^{-x} < 0$, et donc $h'(x) = -e^{-x} - 1 < -1 < 0$ et la fonction h est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
— $h(-1) = e^1 + 1 - 2 = e - 1 > 0$; comme h est strictement décroissante, $h(x) > 0$ pour $x < -1$, donc h ne s'annule pas sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -1[$.
— $h(0) = e^0 - 2 = -1 < 0$; comme h est strictement décroissante, $h(x) < 0$ pour $x > 0$, donc h ne s'annule pas sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
— Sur l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$, la fonction h est continue et strictement décroissante, et on sait que $h(-1) > 0$ et $h(0) < 0$; donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, ou théorème de la bijection, l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique.

La droite Δ et la courbe $\mathcal{C}_g$ ont donc un unique point d'intersection dont l'abscisse est comprise entre -1 et 0.

Exercice 3 *Baccalauréat général, spécialité mathématiques, Métropole 8 juin 2021*

Partie 1

1. D'après la courbe représentant la fonction dérivée f' :
   - la fonction f' est positive sur $]-\infty\ ;\ 1[$ donc la fonction f est croissante sur cet intervalle ;
   - la fonction f' est négative sur $]1\ ;\ +\infty[$ donc la fonction f est décroissante sur cet intervalle.
2. D'après la courbe représentant la fonction dérivée f' :
   - la fonction f' est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$ donc la fonction f est concave sur cet intervalle ;
   - la fonction f' est croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ donc la fonction f est convexe sur cet intervalle.

Partie 2

On admet que la fonction f mentionnée dans la Partie 1 est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+2)e^{-x}$.

1. Pour tout nombre réel x, $f(x) = (x+2)e^{-x} = xe^{-x} + 2e^{-x} = \dfrac{x}{e^x} + 2e^{-x}$.

   Par croissances comparées on a : $\displaystyle\lim_{x\to++\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

   De plus $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   On en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses, comme asymptote horizontale en $+\infty$.
2. a) $f'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+2) \times (-1)e^{-x} = (1-x-2)e^{-x} = (-x-1)e^{-x}$.

   b) Pour tout x, $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x-1$; donc $f'(x)$ s'annule et change de signe en $x = -1$.

   $f(-1) = (-1+2)e^1 = e$; on établit le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$-x-1$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

   c) Sur l'intervalle $[-2\ ;\ -1]$, la fonction f est strictement croissante et continue car dérivable sur cetintervalle. $f(-2) = 0 < 2$ et $f(-1) = e > 2$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (ou théorème de la bijection), l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique sur l'intervalle $[-2\ ;\ -1]$.

   Avec la calculatrice, on trouve $\alpha \simeq -1,6$.
3. $f''(x) = (-1) \times e^{-x} + (-x-1) \times (-1)e^{-x} = (-1+x+1)e^{-x} = xe^{-x}$

   $e^{-x} > 0$ pour tout x, donc $f''(x)$ est du signe de x.
   - Sur $]-\infty\ ;\ 0[$, $f''(x) < 0$ donc la fonction f est concave.
   - Sur $]0\ ;\ +\infty[$, $f''(x) > 0$ donc la fonction f est convexe.
   - En $x = 0$, la dérivée seconde s'annule et change de signe donc le point A d'abscisse 0 de $\mathcal{C}$ est le point d'inflexion de cette courbe.