

Exercice 1 *QCM 1 - Baccalauréat général, spécialité mathématiques, Asie 8 juin 2021*

1. $f(x) = (x^2 - 2x - 1)e^x = x^2e^x - 2xe^x - e^x$.

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, et que, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2e^x = 0$, on obtient, par somme de limites : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Réponse C.

2. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{3}{5 + e^x}$.

— On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{3}{5}$: la droite d'équation $y = \frac{3}{5}$ est asymptote horizontale en moins l'infini

— On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$: l'axe des abscisses est asymptote horizontale au voisinage de plus l'infini.

Réponse C.

3. On voit sur la figure que $f''(-3) = f''(2) = f''(5) = 0$: la dérivée seconde s'annule trois fois donc la fonction f admet trois points d'inflexion.

Réponse B.

4. $u_n = n^2 - 17n + 20$ est un trinôme du second degré qui a un minimum en $n_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{17}{2}$.
Le minimum de la suite est donc u_8 ou u_9 qui est aussi un minorant de la suite.

Réponse A.

5. **Réponse A.**

Exercice 2 *Baccalauréat, terminale générale spécialité mathématiques, 15 mars 2021*

1. a) Les abscisses des points d'intersection de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g sont les points d'abscisses x solutions de l'équation $f(x) = g(x)$, soit

$$f(x) = g(x) \iff x^2e^{-x} = e^{-x} \iff (x^2 - 1)e^{-x} = 0$$

Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$ donc en particulier $e^{-x} \neq 0$, et alors

$$f(x) = g(x) \iff x^2 - 1 = 0 \iff x = -1 \text{ ou } x = 1$$

Pour $x = -1$, $g(x) = e$, et pour $x = 1$, $g(x) = e^{-1}$.

Les coordonnées des points d'intersection sont donc $(-1 ; e)$ et $(1 ; e^{-1})$.

b) Étudier la position relative de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g , revient à étudier le signe de la différence φ définie par

$$\varphi(x) = f(x) - g(x) = (x^2 - 1)e^{-x}$$

soit

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	0	-	0
e^{-x}	+	+	+	+
$(x^2 - 1)e^{-x}$	+	0	-	0

Donc sur les intervalles $]-\infty ; -1[$ et $]1 ; +\infty[$, la courbe \mathcal{C}_f est au dessus de la courbe \mathcal{C}_g , et sur l'intervalle $] - 1 ; 1[$, la courbe \mathcal{C}_f est en dessous de la courbe \mathcal{C}_g ,

2. a) On a $d(x) = (1 - x^2)e^{-x}$, soit $d = uv$ avec $u(x) = 1 - x^2$ donc $u'(x) = -2x$, et $v(x) = e^{-x}$ soit $v = e^w$ donc $v' = w'e^w$ et donc $v'(x) = -e^{-x}$. On a alors $d' = u'v + uv'$, soit

$$\begin{aligned} d'(x) &= -2xe^{-x} + (1 - x^2)(-e^{-x}) \\ &= e^{-x}(-2x - 1 + x^2) \end{aligned}$$

b) Dans la dérivée précédente, on a $e^{-x} > 0$ pour tout réel x , et le trinôme du second degré a pour discriminant $\Delta = (-2)^2 + 4 = 8 > 0$ et admet donc deux racines $x_1 = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{2}$.

On a alors

x	$-\infty$	-1	$1 - \sqrt{2}$	1	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$	
e^{-x}	+	+	+	+	+	+	
$x^2 - 2x - 1$	+	+	0	-	-	0	+
$d'(x)$	+	+	0	-	-	0	+
d							

- Sur l'intervalle $[-1 ; 1 - \sqrt{2}[$, $d'(x) > 0$ donc d est strictement croissante.
- Sur l'intervalle $]1 - \sqrt{2} ; 1]$, $d'(x) < 0$ donc d est strictement décroissante.

c) D'après la question précédente, la distance $d(x)$ est maximale pour $x_0 = 1 - \sqrt{2}$, et vaut alors $d(1 - \sqrt{2}) \approx 1,3$

3. On étudie la fonction h .

La fonction h est dérivable, donc continue ssur \mathbb{R} , avec $h'(x) = -e^{-x} - 1$ donc, comme $e^{-x} > 0 \iff -e^{-x} < 0$, et donc $h'(x) = -e^{-x} - 1 < -1 < 0$ et la fonction h est donc strictement décroissante sur \mathbb{R} .

- $h(-1) = e^1 + 1 - 2 = e - 1 > 0$; comme h est strictement décroissante, $h(x) > 0$ pour $x < -1$, donc h ne s'annule pas sur l'intervalle $] -\infty ; -1[$.
- $h(0) = e^0 - 2 = -1 < 0$; comme h est strictement décroissante, $h(x) < 0$ pour $x > 0$, donc h ne s'annule pas sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
- Sur l'intervalle $[-1 ; 0]$, la fonction h est continue et strictement décroissante, et on sait que $h(-1) > 0$ et $h(0) < 0$; donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, ou théorème de la bijection, l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique.

La droite Δ et la courbe \mathcal{C}_g ont donc un unique point d'intersection dont l'abscisse est comprise entre -1 et 0 .

Exercice 3 Baccaauréat général, spécialité mathématiques, Métropole 8 juin 2021

Partie 1

1. D'après la courbe représentant la fonction dérivée f' :
 - la fonction f' est positive sur $] -\infty ; 1[$ donc la fonction f est croissante sur cet intervalle;
 - la fonction f' est négative sur $]1 ; +\infty[$ donc la fonction f est décroissante sur cet intervalle.
2. D'après la courbe représentant la fonction dérivée f' :
 - la fonction f' est décroissante sur $] -\infty ; 0[$ donc la fonction f est concave sur cet intervalle;
 - la fonction f' est croissante sur $]0 ; +\infty[$ donc la fonction f est convexe sur cet intervalle.

Partie 2

On admet que la fonction f mentionnée dans la Partie 1 est définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (x + 2)e^{-x}$.

1. Pour tout nombre réel x , $f(x) = (x + 2)e^{-x} = xe^{-x} + 2e^{-x} = \frac{x}{e^x} + 2e^{-x}$.

Par croissances comparées on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

On en déduit que la courbe \mathcal{C} admet la droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses, comme asymptote horizontale en $+\infty$.

2. a) $f'(x) = 1 \times e^{-x} + (x + 2) \times (-1)e^{-x} = (1 - x - 2)e^{-x} = (-x - 1)e^{-x}$.

b) Pour tout x , $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x - 1$; donc $f'(x)$ s'annule et change de signe en $x = -1$.

$f(-1) = (-1 + 2)e^1 = e$; on établit le tableau de variations de f sur \mathbb{R} :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$-x - 1$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

c) Sur l'intervalle $[-2 ; -1]$, la fonction f est strictement croissante et continue car dérivable sur cet intervalle. $f(-2) = 0 < 2$ et $f(-1) = e > 2$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (ou théorème de la bijection), l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique sur l'intervalle $[-2 ; -1]$.

Avec la calculatrice, on trouve $\alpha \simeq -1,6$.

3. $f''(x) = (-1) \times e^{-x} + (-x - 1) \times (-1)e^{-x} = (-1 + x + 1)e^{-x} = xe^{-x}$
 $e^{-x} > 0$ pour tout x , donc $f''(x)$ est du signe de x .

- Sur $] -\infty ; 0[$, $f''(x) < 0$ donc la fonction f est concave.
- Sur $]0 ; +\infty[$, $f''(x) > 0$ donc la fonction f est convexe.
- En $x = 0$, la dérivée seconde s'annule et change de signe donc le point A d'abscisse 0 de \mathcal{C} est le point d'inflexion de cette courbe.