Correction du devoir de mathématiques

Exercice 1 En dérivant un produit $f = uv$, avec $v = e^w$, on obtient $f'(x) = (1+2x)e^{2x}$

Exercice 2 On a $x^3 - 3x^2 - 5 = x^3\left(1 - \dfrac{3}{x} - \dfrac{5}{x^3}\right)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{3}{x} - \dfrac{5}{x^3}\right) = 1$, et donc, par produit des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3 - 3x^2 - 5\right) = +\infty$.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$, d'où, par addition des limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x + 3x^2 - 2 = +\infty$.

Exercice 3

a) $u_1 = \dfrac{1}{2}(u_0 + 0) + 1 = \dfrac{1}{2} \times 1 + 1 = \dfrac{3}{2}$ et $u_2 = \dfrac{1}{2}(u_1 + 1) + 1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2} + 1\right) + 1 = \dfrac{9}{4}$.

b) Montrons par récurrence les propriétés $P(n)$: $u_n > n$, pour $n \geqslant 2$.

Initialisation : pour $n = 2$, on a $u_2 = \dfrac{9}{4} > 2$ et $P(2)$ est donc vraie.

Hérédité : Supposons que, pour un certain entier $n \geqslant 2$, $P(n)$ soit vraie, c'est-à-dire : $u_n > n$

Alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{2}(u_n + n) + 1 \\ &> \frac{1}{2}(n + n) + 1 = n + 1 \end{aligned}$$

ce qui montre que la propriété $P(n+1)$ est alors aussi vraie.

Conclusion : on vient de montrer, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $u_n > n$.

c) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, on en déduit d'après le corollaire du théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 4 $u_0 = 0,3$ et $u_{n+1} = 1,8u_n(1 - u_n)$.

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$-2x+1$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$0,45$	$\searrow$	0

a. Pour tout $x \in [0;1]$, $f'(x) = 1,8(-2x+1)$.

De plus, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0,45 \in \left[0;\dfrac{1}{2}\right]$.

b. <u>Initialisation :</u> Pour $n = 0$, $u_0 = 0,3$ et $u_1 = 1,8 \times 0,3\,(1 - 0,3) = 0,378$.

On a bien ainsi $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \dfrac{1}{2}$.

<u>Hérédité :</u> Supposons que pour un entier n, on ait $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Comme la fonction f est croissante sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$, on a donc $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Or, $f(0) = 0$, $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0,45 \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 0,45 \leqslant \dfrac{1}{2}$, et la propriété est encore vraie au rang $(n+1)$.

<u>Conclusion :</u> D'après le principe de récurrence, pour tout entier n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

c. La suite (u_n) est donc croissante est majorée par $\dfrac{1}{2}$. On en déduit qu'elle converge vers une limite l.

d. La limite l vérifie nécessairement, d'après le théorème du point fixe, $l = 1,8l(1-l) \iff 1,8l^2 - 0,8l = 0 \iff l\,(1,8l - 0,8) = 0 \iff l = 0$ ou $l = \dfrac{0,8}{1,8} = \dfrac{4}{9}$.

Or (u_n) est croissante avec $u_0 = 0,3 > 0$, et donc, pour tout entier n, $u_n \geqslant 0,3$.

La limite de la suite ne peut donc être que $l = \dfrac{4}{9}$.