# Devoir de mathématiques

**Exercice** 1 Montrer que, pour tout $x$ réel, $e^x \geqslant x+1$.
On pourra étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto e^x - (x+1)$.

**Exercice** 2 On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{e^x+2}{e^x+1}$.

1. Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de $g$. Interpréter graphiquement ces résultats.
2. Étudier le sens de variation de $g$.
3. Tracer l'allure de la courbe de $g$.

**Exercice** 3 Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par $f(x) = \dfrac{2+3x}{4+x}$.
On considère la suite $(v_n)$ définie par : $v_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = f(v_n)$.

1. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de $f$ et $D$ la droite d'équation $y = x$.
   Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de $D$.
2. a) Montrer que pour tout entier naturel $n$, $1 - v_{n+1} = \left(\dfrac{2}{4+v_n}\right)(1-v_n)$.

   b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
3. La suite $(v_n)$ converge-t-elle ? Si oui, préciser sa limite.

**Exercice** 4 Le but de cet exercice est d'étudier la suite $(u_n)$ définie par : $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}$.
On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = e^{u_n}\left(e^{u_n} - 1\right)$.
On pourra poser éventuellement $f(x) = e^{2x} - e^x$.

1. Soit $g$ la fonction définie pour tout réel $x$ par $g(x) = e^{2x} - e^x - x$.

   a) Déterminer les limites de $g$ en $-\infty$ et $+\infty$.

   b) Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel $x$, $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$.

   c) Déterminer les variations de la fonction $g$ et donner la valeur de son minimum.
2. b) En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite $(u_n)$.

   b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n$, $u_n \leqslant 0$.

   b) Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente vers une limite $l$ qui vérifie $g(l) = 0$. En déduire la limite $l$.