Correction du devoir de mathématiques

Exercice 1 Soit $f : x \mapsto e^x - (x+1)$, définie sur $\mathbb{R}$.
On a alors $f'(x) = e^x - 1$ et alors $f'(x) > 0 \iff e^x > 1 = e^0 \iff x > 0$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a ainsi le tableau de variation

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

avec $f(0) = e^0 - (0+1) = 0$.
Ainsi, le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est $f(0) = 0$, et en particulier, pour tout réel x, on a

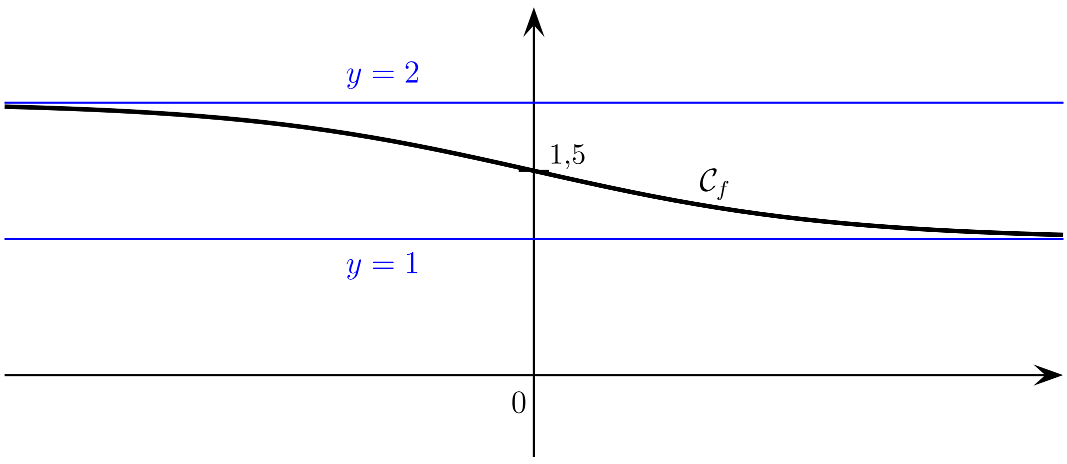
$$\begin{aligned} f(x) \geqslant f(0) = 0 \quad &\iff e^x - (x+1) \geqslant 0 \\ &\iff e^x \geqslant x + 1 \end{aligned}$$

Exercice 2 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{e^x + 2}{e^x + 1}$.

1. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 2$.
   En $+\infty$, on a $g(x) = \dfrac{e^x\left(1 + \dfrac{2}{e^x}\right)}{e^x\left(1 + \dfrac{1}{e^x}\right)} = \dfrac{1 + \dfrac{2}{e^x}}{1 + \dfrac{1}{e^x}}$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} = 1$.
   On en déduit que les droites d'équations $y = 2$ et $y = 1$ sont des asymptotes verticales à la courbe de g, respectivement en $-\infty$ et $+\infty$.
2. On a $g = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = e^x + 2$, donc $u'(x) = e^x$ et $v(x) = e^x + 1$, donc $v'(x) = e^x$.
   On obtient alors $g' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ soit $g'(x) = \dfrac{e^x\left(e^x + 1\right) - \left(e^x + 2\right)e^x}{\left(e^x + 1\right)^2} = \dfrac{-e^x}{\left(e^x + 1\right)^2}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$-e^x$		$-$	
$\left(e^x + 1\right)^2$		$+$	
$g'(x)$		$-$	
g	2	$\searrow$	1

3. On trace alors l'allure de la courbe, avec ses asymptotes



Exercice 3 $f(x) = \dfrac{2+3x}{4+x}$ *(D'près Bac S : métropole - La Réunion 13 septembre 2019)*

1. Les points $M(x;y)$ d'intersection ont une abscisse x qui vérifient l'équation

$$f(x) = x \iff \frac{2+3x}{4+x} = x \iff x(4+x) = 2+3x \iff x^2+x-2 = 0$$

Ce trinôme du second degré a pour discriminant $\Delta = 1+4\times 2 = 9 = 3^2$ et admet donc deux racines : $x_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$.
Comme $x_1 = -2 \notin [0;4]$, il y a un seul point d'intersection : $M(1; f(1))$ soit $M(1;1)$.

2. a) $1 - v_{n+1} = 1 - \dfrac{2+3v_n}{4+v_n} = \dfrac{4+v_n-2-3v_n}{4+v_n} = \dfrac{2-2v_n}{4+v_n} = \dfrac{2}{4+v_n}(1-v_n)$.

   b) *Initialisation* pour $n = 0$, $1 - v_0 = 0,9$; or $\left(\dfrac{1}{2}\right)^0 = 1$.

   On a bien $0 \leqslant 1 - v_0 \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^0$.

   Hérédité Supposons qu'au rang $n \in \mathbb{N}$ quelconque, on ait $1 - v_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

   On a $1 - v_{n+1} = \dfrac{2}{4+v_n}(1-v_n)$, donc d'après l'hypothèse de récurrence :
   $1 - v_{n+1} \leqslant \dfrac{2}{4+v_n} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
   Or $0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \iff v_n \geqslant 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \geqslant 0$; il suit que $4 + v_n \geqslant 4$, donc en prenant les inverses $0 \leqslant \dfrac{1}{4+v_n} \leqslant \dfrac{1}{4}$.

   On a donc $0 \leqslant 1 - v_{n+1} \leqslant 2 \times \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, soit finalement :

   $0 \leqslant 1 - v_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$: l'encadrement est vrai au rang $n+1$.
   L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai à un rang $n$quelconque il est vrai au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence :
   quel que soit le naturel n, $0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

3. Comme $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, donc l'encadrement trouvé à la question précédente montre que, d'après le théorème des gendarmes, la limite de $1 - v_n$ est aussi nulle soit

$$\lim_{n\to+\infty} 1 - v_n = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} v_n = 1.$$

Exercice 4 (u_n) est définie par $u_0 = -1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n+1 = e^{2u_n} - e^{u_n} = f(u_n)$, avec $f(x) = e^{2x} - e^x$.
On a aussi $u_{n+1} = e^{u_n}\left(e^{u_n} - 1\right)$.

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par $g(x) = e^{2x} - e^x - x$.

   a) En $-\infty$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.

   En $+\infty$,

$$g(x) = e^{2x}\left(1 - \frac{e^x}{e^{2x}} - \frac{x}{e^{2x}}\right) = e^{2x}\left(1 - \frac{1}{e^x} - \frac{x}{e^{2x}}\right)$$

avec $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$.

Enfin, $\dfrac{x}{e^{2x}} = \dfrac{1}{\dfrac{e^{2x}}{x}} = \dfrac{1}{\dfrac{e^X}{X}}$ en posant $X = 2x$, et, comme par croissances comparées, $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$,

on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^{2x}} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{e^x} - \dfrac{x}{e^{2x}}\right) = 1$.

On trouve donc finalement, par produit des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

b) On a $g(x) = e^{u(x)} - e^x - x$ avec $u(x) = 2x$, et donc $g'(x) = u'(x)e^{u(x)} - e^x - 1 = 2e^{2x} - e^x - 1$.
Par ailleurs, en développant l'expression $(e^x - 1)(2e^x + 1) = 2e^{2x} + e^x - 2e^x - 1 = 2e^{2x} - e^x - 1$ on obtient bien que, pour tout réel x, $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$.

c) Comme pour tout réel x, on a $e^x > 0$ donc $2e^x > 0$ et on a donc $2e^x + 1 > 1 > 0$.
Par ailleurs, $e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 = e^0 \iff x > 0$ comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
On peut alors dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^x - 1$		$-$	0	$+$	
$2e^x + 1$		$+$	$\vert$	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On calcule aussi le minimum : $g(0) = e^0 - e^0 - 0 = 0$.

2. b) On vient de trouver à la question précédente, que $g(x) \geqslant 0$ pour tout x réel.
Ainsi, $u_{n+1} - u_n = g(u_n) \geqslant 0$, ce qui montre que la suite (u_n) est croissante.

b) Soit la proposition $P(n) : u_n \leqslant 0$.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = -1 \leqslant 0$ et donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que, pour un entier n, $P(n)$ soit vraie, c'est-à-dire $u_n \leqslant 0$.
On a, au rang suivant, $u_{n+1} = e^{u_n}(e^{u_n} - 1)$,
avec $e^{u_n} > 0$, et comme $u_n \leqslant 0$ donc, en appliquant la fonction exponentielle qui est croissante, on obtient $e^{u_n} \leqslant e^0 = 1 \iff e^{u_n} - 1 \leqslant 0$.
Ainsi, $u_{n+1} \leqslant 0$ et la propriété $P(n+1)$ est donc aussi vraie.

Conclusion : On vient donc de démontrer, d'après le principe de récurrence, que les propriétés $P(n) : u_n \leqslant 0$ sont vraies pour tout entier n.

b) On a donc montré que la suite (u_n) est croissante, à la question 2. b), et qu'elle est majorée par 0 à la question précédente ; on en déduit donc qu'elle est convergente vers une limite l.
D'après le théorème du point fixe, on sait de plus que cette limite vérifie

$$f(l) = l \iff e^{2l} - e^l = l \iff e^{2l} - e^l - l = 0 \iff g(l) = 0$$

On a vu que g a pour minimum 0, et donc $g(l) = 0$ a pour unique solution $l = 0$, et on en déduit donc que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$