Devoir maison de mathématiques

Exercice 1 Dans une foire, une publicité annonce : « *Un billet sur deux est gagnant, achetez deux billets !* ».
Dans cet exercice, on suppose qu'effectivement, sur le nombre de billets en vente, exactement un billet sur deux est gagnant. Xavier est toujours le premier acheteur de la journée.

Partie A Un jour, cents billets sont mis en vente. Xavier en achète deux.
Calculer la probabilité qu'il ait au moins un billet gagnant (donner le résultat sous forme de fraction).

Partie B Un autre jour, $2n$ billets sont mis en vente (n est un entier naturel).
Xavier achète deux billets.

1. Démontrer que la probabilité p_n qu'il achète au moins un billet gagnant est : $p_n = \dfrac{3n-1}{4n-2}$.
2. Calculer p_1 et expliquer ce résultat.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\dfrac{3}{4} \leqslant p_n \leqslant 1$.

Partie C Tous les jours, $2n$ billets sont mis en vente (n est un entier naturel non nul).
Xavier revient chaque jour, pendant 3 jours, acheter deux billets.

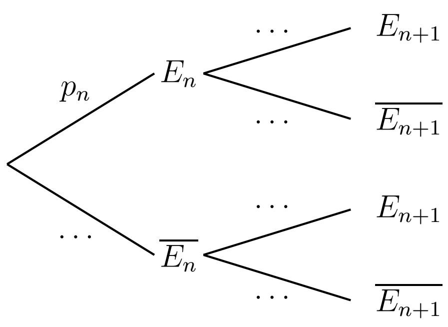
1. Quelle est la probabilité q_n qu'il obtienne, au cours de ces 3 jours, au moins un billet gagnant ?
2. Etudier la limite de la suite (q_n).

Exercice 2 Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,04$.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.
On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

1. a) Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.
   b) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.
2. a) Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous



   b) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.
   c) Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r.
   En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r.

d) En déduire la limite de la suite (p_n).

e) On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante.
On considère le programme Python suivant :

```
p=0
j=1
k=4
while (p < 0.05 − 10 ∗ ∗(−k)) :
   p = 0, 2 ∗ p + 0, 04
   j = j + 1
print(j)
```

À quoi correspond l'affichage final J ? Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

3. Cette entreprise emploie 220 salariés. Pour la suite on admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0,05$.
On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.
On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la variable aléatoire X.

b) Calculer la probabilité de l'événement : « le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15 ».

Exercice 3 La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

1. Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,5625
5	3	3,421875
6	4	4,31640625

2. a) Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B ?

   b) Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

3. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n + 1$.

   b) En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

   c) Démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1$$

4. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$

   a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

   b) En déduire que, pour tout entier naturel n,on a : $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.