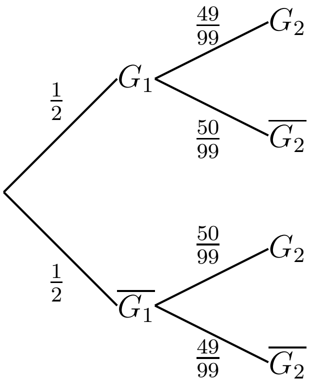
Corrigé du devoir maison de mathématiques

Exercice 1

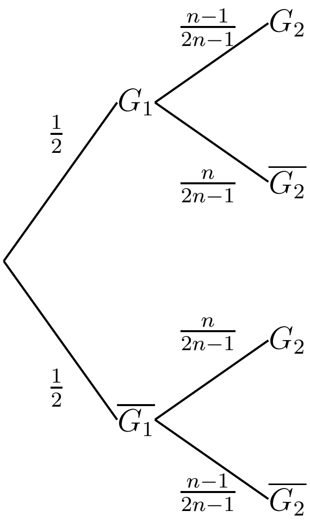
Partie A Notons G_i l'événement « le $i^{\text{ème}}$ billet est gagnant »(pour $1 \leqslant i \leqslant 2$).



L'événement « avoir au moins un billet gagnant »est le contraire de l'événement « avoir exactement deux billets perdants ».
La probabilité de l'événement « Xavier achète au moins un billet gagnant »est donc :

$$p = 1 - P\left(\overline{G_1} \cap \overline{G_2}\right) = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{49}{99} = \frac{149}{198}$$

Partie B



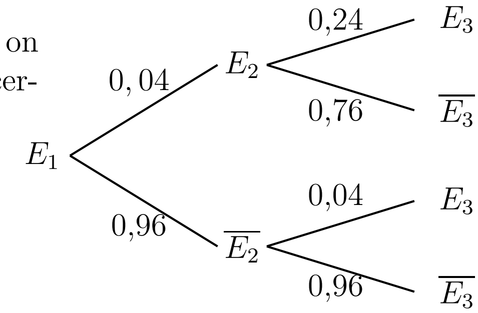
1. $$\begin{aligned} p_n &= 1 - P\left(\overline{G_1} \cap \overline{G_2}\right) = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{n-1}{2n-1} \\ &= \frac{2(2n-1)-(n-1)}{2(2n-1)} = \frac{3n-1}{4n-2} \end{aligned}$$
2. $p_1 = \dfrac{3 \times 1 - 1}{4 \times 1 - 2} = 1$. p_1 est la probabilité que Xavier ait au moins un billet gagnant sur les $2n = 2$ billets mis en vente. Comme il y a exactement 1 billet gagnant sur 2, et que Xavier achète 2 billets, il est certain d'avoir acheté le billet gagnant (et le billet perdant aussi d'ailleurs).
3. Comme p_n est une probabilité, on a évidemment $p_n \leqslant 1$.
   De plus, $p_n - \dfrac{3}{4} = \dfrac{3n-1}{4n-2} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{8n-4}$.
   Or, $n \geqslant 1$, donc $8n - 4 \geqslant 4 > 0$,
   d'où, $\dfrac{1}{8n-4} \geqslant 0 \iff p_n - \dfrac{3}{4} \iff p_n \geqslant \dfrac{3}{4}$.
   En résumé, on a bien pour tout entier $n \geqslant 1$, $\dfrac{3}{4} \leqslant p_n \leqslant 1$.

Partie C

1. On répète $m = 3$, de manière indépendante, la même expérience qui consiste à acheter deux billets.
   On note S l'événement succès « obtenir au moins un billet gagnant ».
   D'après la partie B, on a : $P(S) = \dfrac{3n-1}{4n-2}$.
   Notons X la variable aléatoire égale au nombr de jours où Xavier obtient au moins gagnant, c'est-à-dire la variable aléatoire égale au nombre de succès sur les $m = 3$ répétitions de l'expérience.
   Alors, X suit la loi binomiale de paramètres $m = 3$ et $p = P(S)$, d'où
   $$q_n = P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(1 - \frac{3n-1}{4n-2}\right)^3 = 1 - \left(\frac{n-1}{4n-2}\right)^3$$
2. $\dfrac{n-1}{4n-2}$ est une fraction rationnelle, et donc sa limite en l'infini est égale à la limite de ses termes de plus haut degré : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{4n-2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{4n} = \frac{1}{4}$.
   Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} q_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$.

Exercice 2 ***Bac S Pondichéry - avril 2013***

1. a) Comme la 1ère semaine le salarié n'est pas malade, on peut commencer l'arbre à l'événement $\overline{E_1}$, qui est certain :

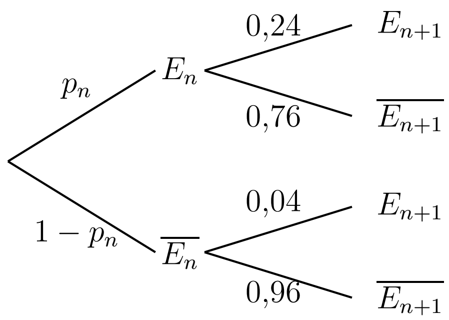


$$\begin{aligned} p_3 = P\left(E_3\right) &= 0,04 \times 0,24 + 0,96 \times 0,04 \\ &= 0,048 \end{aligned}$$

   b) La probabilité que le salarié ait été absent la deuxième semaine sachant qu'il a été absent la troisième semaine, est la probabilité conditionnelle :

$$P_{E_3}\left(E_2\right) = \frac{P\left(E_2 \bigcap E_3\right)}{P(E_3)} = \frac{0,04 \times 0,24}{0,048} = 0,2$$

2. a)



   b) D'après l'arbre précédent, on a, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$p_{n+1} = P\left(E_{n+1}\right) = 0,24\, p_n + 0,04(1 - p_n) = 0,2p_n + 0,04$$

   c) Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,05 = \big(0,2p_n + 0,04\big) - 0,05 = 0,2p_n - 0,01 = 0,2\big(p_n - 0,05\big) = 0,2u_n$$

   La suite (u_n) est donc géométrique de raison $0,2$ et de 1er terme $u_1 = p_1 - 0,05 = -0,05$, et ainsi, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$u_n = -0,05 \times (0,2)^{n-1} \iff p_n = u_n + 0,05 = -0,05 \times (0,2)^{n-1} + 0,05 = 0,05\Big(1 - (0,2)^{n-1}\Big)$$

   d) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,2)^{n-1} = 0$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0,05$.

   e) J est le premier rang de la suite (p_n) tel que $p_J \geqslant 0,05 - 10^{-K}$.
   On est sür que cet algorithme s'arrête car, 0,05 étant la limite de (p_n) et (p_n) étant croissante, pour tout réel ϵ ($\epsilon = 10^{-K}$ dans l'algorithme), l'intervalle $]0,05 - \epsilon; 0,05 + \epsilon[$ contient tous les termes p_n dès que n est assez grand.
   Cet algorithme permet justement de préciser ce "assez grand" : dès que $n \geqslant J$, J étant l'entier calculé et affiché par l'algorithme, tous les termes p_n sont dans l'intervalle $]0,05 - \epsilon; 0,05 + \epsilon[$, en particulier, $p_n \geqslant 0,05 - 10^{-K}$.

3. a) On répète $n = 220$ fois, de manière identique et indépendante (l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues), le "tirage" aléatoire d'un salarié, expérience dont le succès est l'événement : "le salarié est malade" de probabilité $p = 0,05$.
   La variable aléatoire X compte le nombre de succès, c'est-à-dire de salariés malades, et suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(220; 0,05)$.
   On a alors, $\mu = E(X) = np = 11$ et $\sigma = \sigma(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{np(1-p)} \simeq 3,23$.

b) La probabilité de l'évènement : « le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15 » est :

$$P(7 \leqslant X \leqslant 15) \quad \simeq 0,784$$

Exercice 3 La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout n, $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1$.

1. Pour $n = 0$, $u_1 = u_{0+1} = \frac{3}{4}u_0 + \frac{1}{4} \times 0 + 1 = \frac{3}{4} \times 1 + 1 = \frac{7}{4}$.

   Pour $n = 1$, $u_1 = u_{1+1} = \frac{3}{4}u_1 + \frac{1}{4} \times 1 + 1 = \frac{3}{4} \times \frac{7}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{41}{16}$.

2. a) La formule, étirée ensuite vers le bas, que l'on peut écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B est :

   $\boxed{\text{= 3/4 * B2 + 1/4 * A2 +1}}$

   b) La suite (u_n) semble croissante.

3. a) Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

   - **Initialisation**
     Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $0 \leqslant 1 \leqslant 1$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   - **Hérédité**
     On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie, c'est-à-dire : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ (hypothèse de récurrence).

     $$\begin{aligned} n \leqslant u_n \leqslant n+1 &\iff \frac{3}{4}n \leqslant \frac{3}{4}u_n \leqslant \frac{3}{4}(n+1) \\ &\iff \frac{3}{4}n + \frac{1}{4}n \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n \leqslant \frac{3}{4}(n+1) + \frac{1}{4}n \\ &\iff n \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n \leqslant n + \frac{3}{4} \\ &\iff n+1 \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 \leqslant n + \frac{3}{4} + 1 \iff n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n + \frac{7}{4} \end{aligned}$$

     donc $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$.
     On a démontré que la propriété était vraie au rang $n+1$.
   - **Conclusion**
     La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$; d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

   On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

   b) D'après la question précédente, pour tout n, $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ donc aussi, au rang suivant, $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$.
   On a alors,

   $$n \leqslant u_n \leqslant n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$$

   et donc, entre autre que $u_n \leqslant u_{n+1}$, c'est-à-dire que la suite (u_n) est croissante.

   On a aussi de ces inégalités que $n \leqslant u_n$, et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ donc, par comparaison (corrolaire du théorème des gendarmes), $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

   c) Pour tout n, $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ donc pour tout $n > 0$, on a : $1 \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{n+1}{n}$ c'est-à-dire : $1 \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant 1 + \frac{1}{n}$.

   $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$

   Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.

4. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$

a) Pour tout n, $v_n = u_n - n$ donc $u_n = v_n + n$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - (n+1) \\ &= \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 - n - 1 \\ &= \frac{3}{4}(v_n + n) - \frac{3}{4}n \\ &= \frac{3}{4}v_n + \frac{3}{4}n - \frac{3}{4}n \\ &= \frac{3}{4}v_n \end{aligned}$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 = 1$

b) On en déduit que, pour tout n,

$$v_n = v_0 \times q^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

et donc aussi, comme $u_n = v_n + n$, on a $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.