Devoir maison: Suites et limites

Terminale générale
Spécialité maths

Exercice 1 On considère la suite (u_n) définie par : $u_1 = -5$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} = \left(1 + \frac{2}{n}\right) u_n + \frac{18}{n} - 4\,.$$

1. Calculer u_2 et u_3.
   Quelle conjecture peut-on faire sur la suite (u_n).
2. Qu'affiche l'exécution du programme Python suivant ?

```
u=-5
for n in range(1,5) :
    u=(1+2/n)*u+18/n-4
    print(u)
```

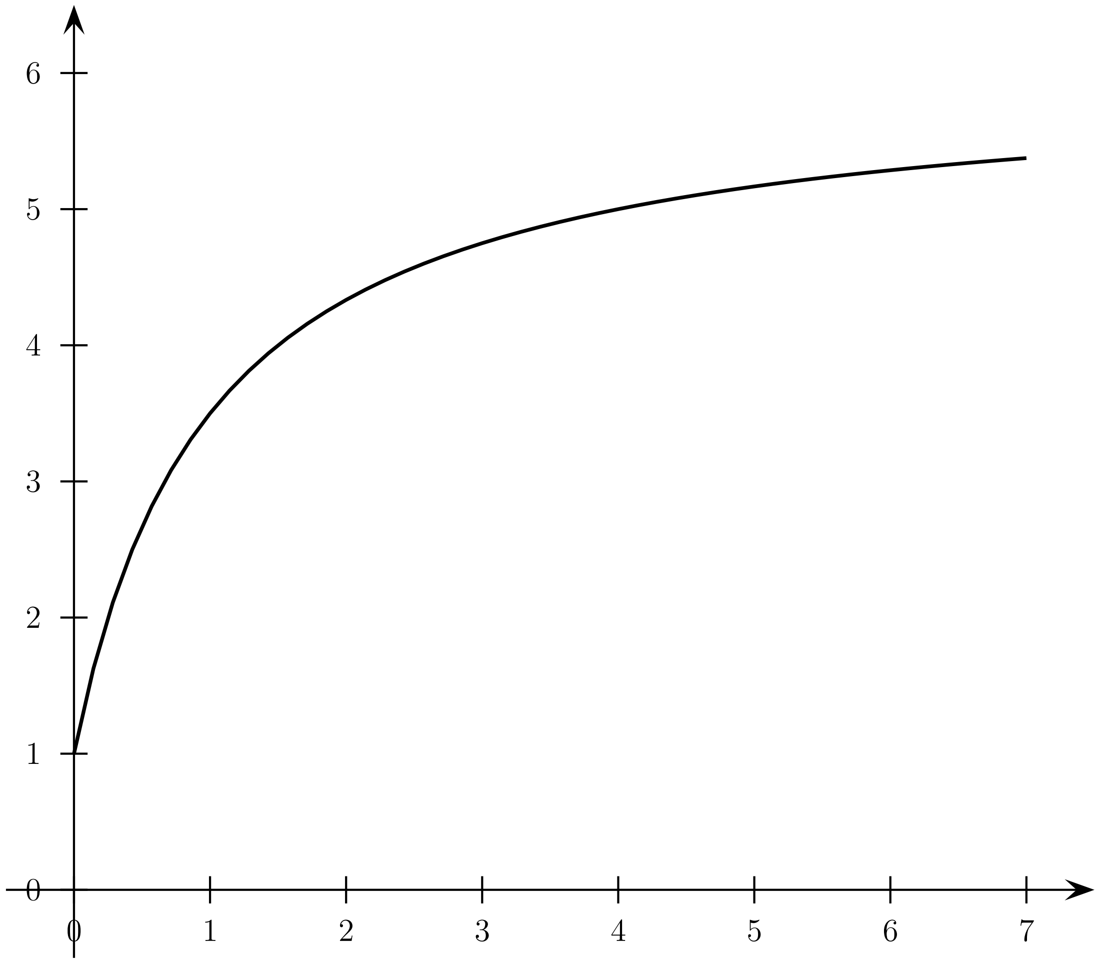
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = 4n - 9$.

Exercice 2 On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et par la relation de récurrence, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 1$.

1. En s'inspirant de l'exercice 1, écrire un programme qui permet de calculer et afficher les 20 premiers termes de cette suite.
2. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 3$.
   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique, dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Exprimer v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n.

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{6x+1}{x+1}$.
Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. **Etude de propriétés de la fonction f**
   a. Etudier le sens de variation de la fonction f sur $[0;+\infty[$.
   b. Résoudre dans l'intervalle $[0;+\infty[$ l'équation $f(x) = x$. On note α la solution.
   c. Montrer que si x appartient à l'intervalle $[0;\alpha]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0;\alpha]$.
2. **Etude de la suite (u_n) pour $u_0 = 0$**
   a. En s'inspirant de l'exercice 1, écrire un programme qui permet de calculer et afficher les 100 premiers termes de cette suite.
   b. La courbe représentative de f est donnée ci-dessous.
      Placer sur ce graphique le points A_0 de coordonnées $(u_0;0)$ et construire les points A_1, A_2, A_3 et A_4 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et u_4.
      Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite (u_n) ?
   c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $u_n \leqslant u_{n+1}$.
      Quel est alors le sens de variation de la suite (u_n) ?


0
1
2
3
4
5
6
7
0
1
2
3
4
5
6